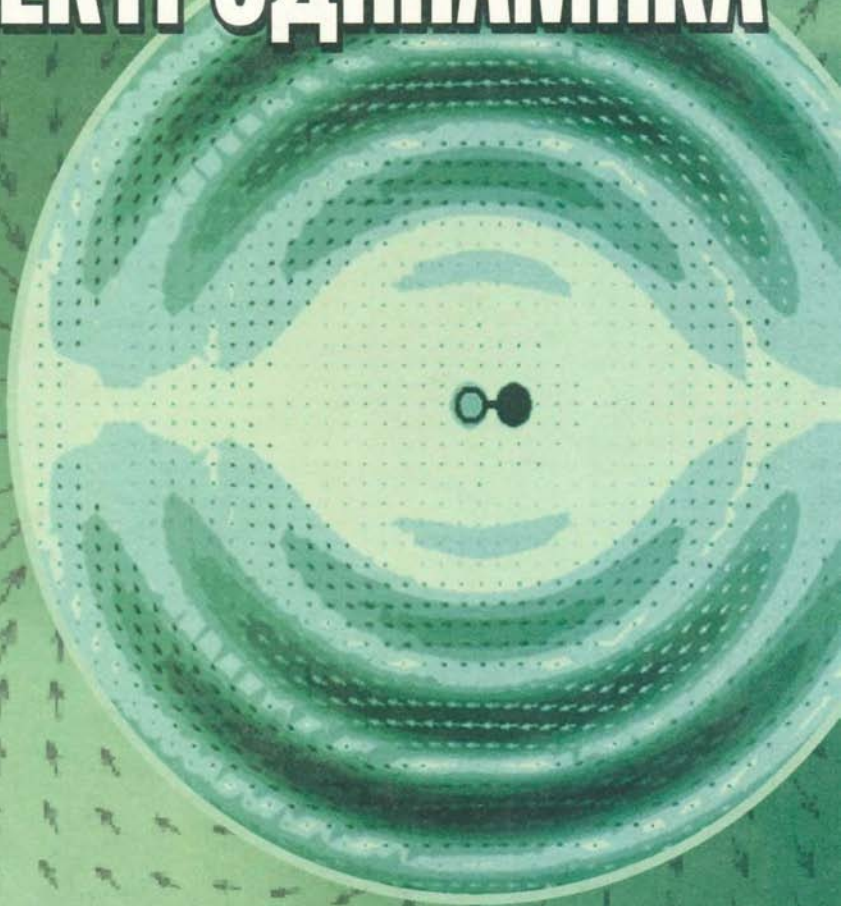




**В.П. Якубов**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**





МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.П. Якубов**

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

*Рекомендовано*

*УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по направлению 010800 – Радиофизика  
и по специальности 010801 – Радиофизика и электроника*



Томск – 2006

УДК 538.3(075.8)

Я 492

**Якубов В.П.** Электродинамика: Учебное пособие. – Томск:  
Я 492 Изд-во НТЛ, 2006. – 148 с.

ISBN 5-89503-289-3

В учебном пособии излагаются основы теории электромагнитных полей, создаваемых зарядами и токами, основы описания взаимодействия электромагнитных полей с веществом, излагаются элементы специальной теории относительности для электромагнитных полей. Изучение этих основ необходимо для понимания физики всех явлений, встречающихся в радиофизике, и является ключевым для изучения других дисциплин, входящих в университетские программы по радиофизике.

Для преподавателей, студентов и аспирантов, обучающихся по направлению 010800 – Радиофизика и по специальности 010801 – Радиофизика и электроника, а также может быть полезным для подготовки специалистов других направлений и специальностей.

УДК 538.3(075.8)

*Издание оплачено из средств  
благотворительного некоммерческого фонда  
«Фонд содействия образованию и науке  
Томского государственного университета»*

ISBN 5-89503-289-3

© В.П. Якубов, 2006

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	6
ВВЕДЕНИЕ.....	8
Глава 1. Основные уравнения электродинамики .....	12
1.1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения .....	12
1.2. Уравнения Максвелла и основные законы электромагнетизма .....	15
1.2.1. Закон сохранения заряда .....	15
1.2.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея.....	15
1.2.3. Закон Кулона.....	16
1.2.4. Закон Гаусса.....	17
1.2.5. Закон Био – Савара – Лапласа (интегральный) .....	17
1.2.6. Первый закон Кирхгофа .....	17
1.2.7. Второй закон Кирхгофа .....	18
1.3. Уравнения Максвелла в симметричной форме .....	20
1.4. Граничные условия для электромагнитного поля.....	21
1.4.1. Тангенциальные компоненты поля.....	22
1.4.2. Нормальные компоненты поля .....	23
1.4.3. Импедансные условия и условия излучения .....	25
1.5. Вектор и теорема Пойнтинга .....	25
1.6. Накопление энергии в конденсаторе.....	28
1.7. Тепловые потери в проводнике .....	29
1.8. Теорема единственности решения уравнений Максвелла.....	31
Глава 2. Электромагнитные поля заданных источников .....	33
2.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля .....	34
2.2. Скалярный и векторный потенциалы .....	35
2.3. Вектор Герца .....	37
2.4. Решение однородного волнового уравнения .....	39
2.5. Решение в запаздывающих потенциалах.....	41
2.6. Дифференциальный закон Био – Савара – Лапласа .....	43

2.7. Элементарный электрический диполь .....	44
2.7.1. Вектор Герца диполя .....	44
2.7.2. Стационарный диполь .....	46
2.7.3. Колеблющийся диполь .....	47
2.7.4. Излучение ускоренно движущегося заряда .....	52
2.8. Элементарный магнитный диполь .....	54
<b>Глава 3. Гармонические поля .....</b>	<b>57</b>
3.1. О комплексных представлениях в электродинамике .....	57
3.2. Уравнения Максвелла в частотном представлении .....	60
3.3. Электродинамические потенциалы в комплексном представлении .....	63
3.4. Вектор и теорема Пойнтинга в комплексном представлении .....	63
3.5. Поле элементарного электрического вибратора .....	67
3.5.1. Пространственно-частотное представление поля .....	67
3.5.2. Ближняя зона .....	69
3.5.3. Дальняя зона .....	71
3.6. Излучение элементарного магнитного вибратора .....	72
3.7. Поляризация электромагнитных волн .....	74
3.8. Лемма Лоренца и теорема взаимности .....	79
3.9. Эквивалентные источники и принцип Гюйгенса – Френеля .....	81
3.10. Излучение элемента Гюйгенса .....	84
<b>Глава 4. Взаимодействие электромагнитного поля с веществом ....</b>	<b>87</b>
4.1. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле .....	87
4.2. Движение заряженной частицы в постоянном электрическом поле .....	89
4.3. Движение частицы в однородных постоянных скрещенных полях .....	90
4.4. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле .....	92
4.5. Пространственно-временная адиабатическая инвариантность магнитного момента движения частицы .....	93
4.6. Импульс электромагнитного поля .....	96
4.7. Диэлектрическая проницаемость облака заряженных частиц .....	98

4.8. Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков .....	102
4.9. Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков .....	104
<b>Глава 5. Релятивистские представления .....</b>	<b>107</b>
5.1. Принцип относительности и постулат Эйнштейна .....	107
5.2. Четырехвекторы и преобразование Лоренца .....	108
5.3. Четырехвекторы скорости и ускорения .....	111
5.4. Четырехвектор-потенциал и четырехвектор тока .....	113
5.5. Преобразования четырехвектора-потенциала и тока .....	114
5.6. Тензор электромагнитного поля .....	116
5.7. Преобразование компонент электромагнитного поля .....	117
5.8. Потенциалы Льенара – Вихерта .....	119
5.9. Электромагнитное поле произвольно движущегося заряда .....	120
5.10. Эффект Доплера .....	121
5.11. Резюме .....	123
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>124</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>125</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>126</b>
<b>Приложение 1. Задачи .....</b>	<b>129</b>
<b>Приложение 2. Расчет статического поля .....</b>	<b>143</b>
<b>Приложение 3. Расчет поля излучения .....</b>	<b>144</b>

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\vec{A}, \varphi$	– векторный и скалярный потенциалы
$\vec{\Gamma}$	– вектор Герца
$\vec{D}, \vec{B}$	– векторы электрической и магнитной индукции
$\vec{E}, \vec{H}$	– векторы напряженности электрического и магнитного полей
$\vec{F}$	– вектор силы
$F_{ij}, f_{ij}$	– тензоры электромагнитного поля
$\vec{I}, \vec{j}$	– векторы тока и его плотности
$\vec{I}_{\text{см}}, \vec{j}_{\text{см}}$	– векторы тока смещения и его плотности
$\vec{I}_{\text{ст}}, \vec{j}_{\text{ст}}$	– векторы стороннего тока и его плотности
$\vec{I}^{(m)}, \vec{j}^{(m)}$	– векторы магнитного тока и его плотности
$\vec{j}_{\text{экв}}^{(e)}, \vec{j}_{\text{экв}}^{(m)}$	– векторы плотности эквивалентных электрических и магнитных токов
$k$	– волновое число
$\vec{\Pi}$	– вектор Пойнтинга
$P_{\text{ст}}, p_{\text{ст}}$	– мощность сторонних источников и её плотность
$P_{\text{изл}}, p_{\text{изл}}$	– мощность излучения и её плотность
$q, \rho$	– электрический заряд и его плотность
$R_{\text{изл}}$	– сопротивление излучения
$R, U, W$	– 4-векторы события, скорости и ускорения
$S$	– интервал между событиями в 4-мерном пространстве
$v_{\phi}, v_{\phi}$	– фазовая скорость волны
$W_e, w_e$	– энергия электрического поля и её плотность
$W_m, w_m$	– энергия магнитного поля и её плотность



---

$Z_0$	– волновое сопротивление среды
$\Phi, S$	– 4-векторы потенциала и тока
$\alpha_{ij}$	– элементы матрицы Лоренца
$\beta = v/c$	– релятивистский параметр
$\epsilon_a, \epsilon$	– абсолютная и относительная диэлектрические проницаемости
$\epsilon_0, \mu_0$	– электрическая и магнитная постоянные
$\mu_a, \mu$	– абсолютная и относительная магнитные проницаемости
$\sigma, \sigma_{эфф}$	– удельная проводимость
$\omega, \omega_{кр}$	– круговая частота и критическая частота

## ВВЕДЕНИЕ

Электродинамика – это раздел физики, занимающийся изучением теории электромагнитного поля, посредством которого взаимодействуют заряды и токи. Электромагнитные взаимодействия являются самыми сильными бесконтактными взаимодействиями в макром мире, и поэтому роль их очень велика.

В развитии электродинамики можно выделить, по крайней мере, четыре исторических этапа:

**1. Качественный этап**, продолжался до конца XVII века и был основан на описательном изучении электромагнитных явлений. В этот период хотя и понимали различие между магнитными и электрическими явлениями, но уже видели много общего в их поведении. Так, магнитные явления связывались с определенными сортами железной руды и широко использовались. Благодаря магнитному компасу стали возможны многие географические открытия. Электрические явления проявлялись при трении диэлектриков, например янтаря. В этом состояло различие, а как общее было замечено, что одноименные заряды и полюса отталкиваются, и наоборот, разноименные притягиваются. Причины, вызывающие это, были не ясны и часто приписывались некоему божественному началу. Так или иначе, основные проявления этих явлений к концу XVII века были подробно описаны. Итогом этого этапа по праву считается трактат Гильберта «О магните».

**2. Количественный этап**, относится к периоду от середины XVIII до середины XIX века. В этот период исследователи научились получать электрические заряды в достаточном для измерений количестве. В 1762 году известный в будущем общественный деятель Бенджамин Франклин доложил в Королевском физическом обществе Англии результаты своих опытов по атмосферному электричеству, в которых впервые прозвучали такие понятия, как заряд, электрический ток и разряд. Благодаря Франклину в практику вошло использование простейшей антенны – громоотвода. Далее можно назвать выдающегося отечественного ученого Михаила Ломоносова, который вслед за Франклином обратился к грозovým разрядам, и только роковые обстоятельства не

позволили ему тогда продолжить это направление работ. Однако его успехи по электрохимии дали возможность получить новый тогда материал – алюминий.

Методы накопления электричества, предложенные А. Вольты в 1779 году и Л. Гольвани в 1791 году, дали твердую основу для серьезных количественных измерений. В 1784 году Шарль Кулон с помощью крутильных весов впервые установил закон притяжения и отталкивания электрических зарядов, который и обрел его имя. Красота установленного закона, согласно которому сила притяжения (отталкивания) прямо пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна расстоянию между ними, вдохновляла на новые исследования уже с током зарядов. В 1908 году появилась работа Г. Дэви по электрохимии в растворах. В 1820 году стали известны опыты по токам в металлах. Прежде всего, это Г. Ом со своим законом. Далее Х. Эрстэд и А. Ампер, которые установили появление магнитного поля вблизи токов и силу взаимодействия токов посредством магнитного поля. Так началось новое сближение электрических и магнитных представлений: оказалось, магнитное поле появляется при движении носителей зарядов.

**3. Этап обнаружения электромагнитных волн** – поистине революционный для электродинамики период, начался в 1831 году, когда впервые М. Фарадей установил, что изменяющееся магнитное поле способно порождать электрическое поле. В 1864 году М. Максвелл, стремясь придать математическую стройность всем установленным ранее законам электромагнетизма, записал свои знаменитые уравнения – уравнения Максвелла. Руководствуясь скорей интуицией и математической симметрией, чем экспериментальными данными, он вынужденно ввел в свои уравнения новый член – ток смещения. Тогда бы логический круг красиво замыкался: изменяющееся электрическое поле порождало бы магнитное поле, а изменяющееся магнитное поле – электрическое. Из полученных Максвеллом уравнений следовал неожиданный тогда вывод – в природе должны существовать электромагнитные волны! Причем скорость распространения этих волн должна совпадать со скоростью света. И далее, еще более поразительный вывод – догадка, а не является ли свет электромагнитной волной?

В 1886 году другой выдающийся ученый Г. Герц экспериментально подтвердил существование и токов смещения, и электромагнитных волн. Он же придал уравнениям Максвелла векторный вид, практически совпадающий с их современной формулировкой. Следует, однако, упомянуть, что, открыв электромагнитные волны, Г. Герц не увидел ника-

кой практической пользы от них – слишком быстро они ослаблялись. Практическую пользу от использования электромагнитных волн для передачи сообщений усмотрел через 9 лет, в 1895 году, изобретатель радио – российский ученый А.С. Попов. Вслед за ним практически к тому же решению пришел итальянский изобретатель Г. Маркони. Что касается свойства света как электромагнитной волны, то в 1901 году отечественный ученый П. Лебедев убедительно доказал это в своих опытах по измерению давления света.

**4. Релятивистский (современный) этап,** в электродинамике начался в 1905 году с работы А. Эйнштейна, в которой были сформулированы основные принципы т.н. специальной теории относительности (СТО). Основным при этом было утверждение-постулат, что свет (он же – электромагнитная волна) распространяется во всех инерциальных системах отсчета с одинаковой и предельно высокой скоростью – скоростью света. Опыты Майкельсона говорили об этом однозначно. Преобразования Лоренца и Минковского математически показывали, что для того, чтобы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой скорость света оставалась постоянной, изменяться должны не только пространственные масштабы, но и временные. В конечном счете, это дало основание к приданию всем уравнениям электромагнетизма, в том числе и уравнениям Максвелла, релятивистски инвариантного вида. При этом не потребовалось вводить никаких поправочных множителей, поскольку уравнения Максвелла уже в самой своей основе верно описывают релятивистский объект – электромагнитное поле, движущееся со скоростью света.

Такое переосмысление основных уравнений электромагнетизма физически и математически закрепило представление о полном единстве электрических и магнитных полей. Существует единый объект – электромагнитное поле, которое в некоторых системах отсчета проявляется либо как чисто электрическое, либо как магнитное поле, но чаще как их суперпозиция. Это подобно тому, как у монеты есть две стороны. Простой пример: покоящийся заряд или их группа имеет только электрическое поле. Но если посмотреть на это из движущейся системы, то мы видим уже электрический ток, а он создает магнитное поле. Значит, только за счет перехода от одной системы отсчета к другой можно увидеть вторую проекцию электромагнитного поля – его магнитную составляющую. Сразу заметим, что четвертый этап развития электродинамики принес не только методическое изящество теории, но и дал ряд новых физических результатов, широко используемых на практике.

Отдавая должное истории становления электродинамики и стремясь максимально сохранить целостность её структуры, изложение курса начнем фактически сразу с вершины классической электродинамики – с уравнений Максвелла. Эти уравнения совместно с материальными уравнениями и граничными условиями сформулированы в начале гл. 1. Здесь же записаны и доказаны основополагающие теоремы электродинамики – теорема Пойнтинга и теорема единственности решений уравнений Максвелла. В гл. 2 показано, как практически пользоваться уравнениями Максвелла для расчета полей заданных источников. На примере колеблющегося электрического диполя дано представление о возникновении особого состояния электромагнитного поля – в виде поля излучения. Без преувеличения этот результат является центральным во всем курсе электродинамики. Запись основных представлений электродинамики в гл. 3 для гармонических полей позволит значительно расширить круг приложений и следствий, важных для практики. В гл. 4 рассмотрены основы описания взаимодействия электромагнитного поля с веществом, обоснованы материальные уравнения и фактически сделан переход к электродинамике материальных сред в её традиционном варианте. В гл. 5, заключительной в курсе, рассмотрены релятивистские представления и следствия из них. Выводы этой главы имеют мировоззренческое значение и позволяют с единой позиции взглянуть на электрические и магнитные поля. В Приложении 1 приводятся типовые задачи по курсу с решениями и ответами. Автор выражает признательность доцентам А.С. Завьялову и О.Г. Пономареву, которые подготовили эти задачи. В Приложениях 2 и 3 приводятся полезные программы расчета поля диполя в ближней и дальней зонах.

С высоты современной физической картины мира, которая, кстати, все еще продолжает развиваться, можно уверенно утверждать, что электродинамические представления являются связующими между многими дисциплинами. Знание законов электродинамики часто является ключом к пониманию многих процессов в геологии, биологии, химии и др. Если говорить о радиофизике, радиоэлектронике и оптике, то электродинамика является основополагающей для них дисциплиной.

Издание предлагаемого пособия основано как на общей потребности обновления отечественной учебной литературы с учетом современных представлений по основополагающим дисциплинам, так и на назревшей необходимости нового краткого, но ясного изложения основ электродинамики с сохранением строгости, содержательности и обоснованности.

# Глава 1

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

### 1.1. Уравнения Максвелла и материальные уравнения

Отдавая должное истории становления электродинамики, начнем изложение сразу с её вершины – уравнений Максвелла. Можно считать экспериментально установленным, что все электромагнитные поля описываются четырьмя уравнениями Максвелла:

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} d\vec{s} + I \oint \partial \quad (1.1)$
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{s} \quad (1.2)$
$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\iint_S \vec{D} d\vec{s} = q \quad (1.3)$
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\iint_S \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (1.4)$

Интегральные и дифференциальные формы уравнений эквивалентны и взаимосвязаны известными интегральными теоремами математической физики: Стокса и Остроградского – Гаусса.

Входящие в уравнения (1.1) – (1.4) величины  $\rho$  и  $\vec{j}$  означают плотность заряда и тока соответственно, так что и заряд (внутри некоторого объема  $V$ ), и ток  $I$  (через некоторую площадку  $S$ ) вычисляются с помощью интегралов:

$$q = \iiint_V \rho dV, \quad I = \iint_S \vec{j} d\vec{s}. \quad (1.5)$$

Под величиной тока  $I$  через некоторую площадку  $S$  понимается количество зарядов  $q$ , проходящих через её сечение. Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  называются векторами напряженности электрического и магнитного поля, а  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  – векторами индукции электрического и магнитного поля соответственно. Между собой эти векторы связаны т.н. материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}. \quad (1.6)$$

Здесь коэффициенты пропорциональности  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  называются абсолютными диэлектрической и магнитной проницаемостями вещества, в котором находятся поля. Для разных веществ эти коэффициенты разные, и для вакуума они совпадают с т.н. электрической  $\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$  [ф/м] и магнитной  $\mu_0 = 4\pi/10^7$  [Гн/м] постоянными, которые связаны со скоростью света ( $c = 299000$  км/с) простым соотношением  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ . Наряду с абсолютными проницаемостями часто пользуются безразмерными относительными проницаемостями, которые определяются как

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0, \quad \mu = \mu_a / \mu_0. \quad (1.7)$$

Обычно величину тока разбивают на две части, например  $\vec{j} = \vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{ст}}$ , где первое слагаемое соответствует т.н. току проводимости, для которого

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}. \quad (1.8)$$

Здесь  $\sigma$  – удельная проводимость вещества, в котором течет электрический ток, измеряемая в [См/м]. Соотношение (1.8) известно как дифференциальный закон Ома. Вторая составляющая тока  $\vec{j}_{\text{ст}}$  соответствует т.н. стороннему току. Сразу заметим, что первое слагаемое в правой части первого уравнения Максвелла (1.1), имеющее вид

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv \vec{j}_{\text{см}}, \quad (1.9)$$

соответствует т.н. току смещения, исключительная заслуга введения которого принадлежит Максвеллу. В конечном счете, вся радиофизика возникла благодаря его существованию.

Величины  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  характеризуют реакцию вещества на электромагнитное поле и вместе называются электрофизическими параметрами вещества, а поэтому соотношения (1.7) и (1.8) называются материальными уравнениями.

Электромагнитное поле является материальным объектом, который обнаруживается благодаря его взаимодействию с другими материальными объектами – токами и зарядами. Так, на покоящийся элементарный заряд  $q$  электромагнитное поле воздействует с силой  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Измерив эту силу, можно определить напряженность поля  $\vec{E}$ . На заряд, движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , электромагнитное поле действует с силой, равной

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]). \quad (1.10)$$

Измеряя её, можно измерить параметры и магнитного поля. Именно так делается, например, в трековых или пузырьковых камерах (рис. 1). Следует заметить, что формула (1.10) при релятивистских скоростях нуждается в небольшой коррекции, но об этом мы поговорим в конце нашего курса.



Рис. 1. След электрона в пузырьковой камере

Уравнения Максвелла являются обобщением экспериментальных фактов и служат своего рода постулатами, на которых базируется вся радиофизика.

Заметим, что при выбранном нами подходе материальные уравнения также выступают как постулаты, и это позволяет с единой позиции рассмотреть электродинамику вакуума и электродинамику материальных сред, что особенно важно для приложений. Однако следует знать, что в отличие от уравнений Максвелла материальные уравнения можно вывести из уравнений движения материи в электромагнитных полях. Пример такого подхода будет продемонстрирован в главе 4.



## 1.2. Уравнения Максвелла и основные законы электромагнетизма

Этот раздел имеет своей целью показать, каким образом в уравнениях Максвелла содержатся все основные законы электромагнетизма. Это и будет доказательством экспериментальной обоснованности уравнений Максвелла.

### 1.2.1. Закон сохранения заряда

Этот закон можно увидеть, если к первому уравнению Максвелла (1.1) в дифференциальной форме применить операцию дивергенции

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} + \operatorname{div} \vec{j}.$$

Используем теперь то, что для любого вектора левая часть этого соотношения всегда равна нулю. С учетом четвертого уравнения Максвелла (1.4) отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

что и есть запись закона сохранения заряда в дифференциальной форме. Переход к интегральной форме с использованием интегральной теоремы Остроградского – Гаусса достаточно очевиден:

$$\frac{\partial}{\partial t} q + I = 0.$$

Звучит этот закон так: «Полный ток, вытекающий из некоторого объема, равен скорости убывания заряда, накопленного в этом объеме» (рис. 2).

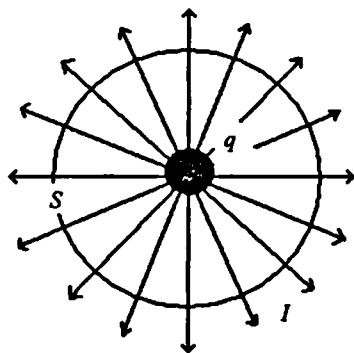


Рис. 2. К закону сохранения заряда

### 1.2.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Если ввести обозначения

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{s} \quad \text{и} \quad U = -\oint_L \vec{E} d\vec{l}$$

для потока вектора магнитной индукции через некоторое сечение  $S$  и для электродвижущей силы (ЭДС), действующей в замкнутом контуре  $L$ ,

который является границей сечения  $S$ , то второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1.2) записывается как

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Это и есть закон электромагнитной индукции Фарадея в формулировке: «ЭДС, наводимая в замкнутом контуре, равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего сечение, ограниченное этим контуром».

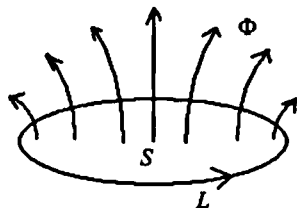


Рис. 3. К закону Фарадея

Таким образом, второе уравнение Максвелла – это и есть закон Фарадея, причем в обобщенной формулировке: замкнутый контур может быть любым, не обязательно совпадающим с металлическим проводником, как это было в изначально установленном Фарадеем законе. Контур этот вообще может быть проведен мысленно (рис. 3).

### 1.2.3. Закон Кулона

Рассмотрим поле точечного заряда  $q_1$ , которое он создает на расстоянии  $r$  от своего центра. Для этого окружим этот заряд воображаемой сферой радиуса  $r$  (рис. 4). Применим к объёму этой сферы третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.3). В силу полной симметрии задачи имеем

$$4\pi r^2 D = q_1.$$

Отсюда с учетом материального уравнения (1.6) имеем

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Если теперь на расстоянии  $r$  поместить второй заряд  $q_2$ , то, согласно (1.10), на него будет действовать сила

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r},$$

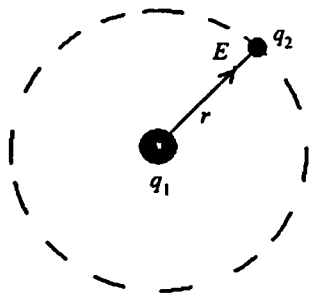


Рис. 4. К закону Кулона

а это и есть сила Кулона: «Сила притяжения (отталкивания) двух зарядов прямо пропорциональна величине зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними».

### 1.2.4. Закон Гаусса

Законом Гаусса является третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.3): «Поток вектора электрической индукции через замкнутую поверхность равен заряду, заключенному внутри этой поверхности». Можно добавить, что из уравнения (1.3) непосредственно следует, что силовые линии электрического поля выходят из положительного заряда и входят в отрицательный заряд.

### 1.2.5. Закон Био – Савара – Лапласа (интегральный)

Интегральный закон Био – Савара – Лапласа устанавливает значение напряженности магнитного поля  $H$  на расстоянии  $r$  от бесконечно длинного прямолинейного провода, по которому течет ток  $I$ . Для этого окружим провод окружностью радиуса  $r$  и применим первое уравнение Максвелла в интегральной форме (1.1), считая, что ток постоянен во времени (рис. 5). В силу полной симметрии задачи можно записать

$$2\pi r H = I, \text{ или } H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Это составляет содержание интегрального закона Био – Савара – Лапласа: «Напряженность магнитного поля, создаваемая бесконечно длинным прямолинейным проводом, прямо пропорциональна протекающему по нему току и обратно пропорциональна расстоянию до него». Дифференциальный вариант закона также «запрятан» в уравнениях Максвелла, но для его «отыскания» требуются некоторые дополнительные математические построения, которые будут приведены позднее.

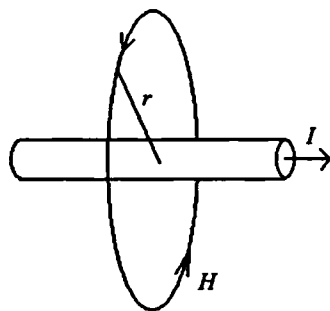


Рис. 5. К закону Био – Савара – Лапласа

### 1.2.6. Первый закон Кирхгофа

Этот закон относится к радиотехнике и гласит: «Алгебраическая сумма токов в узловой точке равна нулю». Иначе говоря, в узловых точках зарядов не накапливается – сколько зарядов входит, столько и выходит. Как это ни удивительно, этот закон электромагнетизма также включен в уравнения Максвелла.

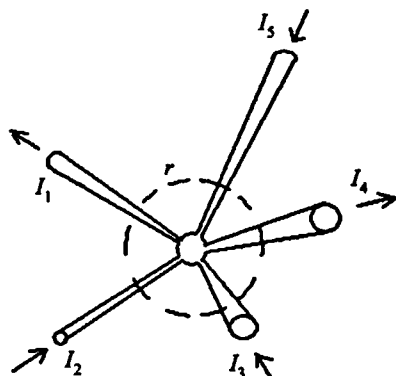


Рис. 6. К первому закону Кирхгофа

Рассмотрим некоторую узловую точку (рис. 6) и окружим её сферой радиуса  $r$ . Взяв поверхность этой сферы за область интегрирования, в третьем уравнении Максвелла в интегральной форме (1.3) после дифференцирования по времени запишем

$$\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

С учетом закона сохранения заряда в интегральной форме и обозначения (1.9) отсюда можно записать

$$I_{\text{см}} + I = 0,$$

где

$$I_{\text{см}} \equiv \oint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S}$$

означает полный ток смещения, вытекающий из узловой точки. С учетом множества путей реализации токов мы можем окончательно записать

$$\sum_i I_{\text{см}i} + \sum_k I_k = 0,$$

что и является обобщением первого закона Кирхгофа, поскольку теперь в нем учтены ещё и токи смещения.

### 1.2.7. Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа связан с падениями напряжений в замкнутой цепи: «Сумма падений напряжений в замкнутой цепи равна сумме ЭДС, действующих в ней». Рассмотрим некоторую обобщенную замкнутую цепь, в которую включены следующие элементы: сопротивление  $R$ , емкость  $C$ , индуктивность  $L$  и источник сторонней ЭДС  $U$  (рис. 7).

Будем считать, что весь магнитный поток, пронизывающий выделенную замкнутую цепь, перехватывается индуктивностью и равен

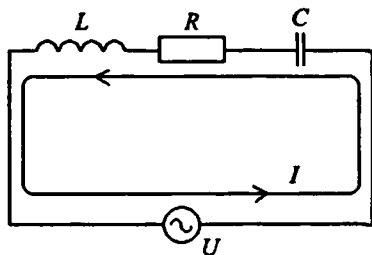


Рис. 7. Ко второму закону Кирхгофа

$$\Phi = L \cdot I + M \cdot I_m,$$

где  $L$  – коэффициент самоиндукции, вызываемый током  $I$ , и  $M$  – коэффициент взаимной индукции, вызываемый некоторым током  $I_m$  внешней цепи. Применим второе уравнение Максвелла в интегральной форме (1.2), разбив интеграл по замкнутому контуру в левой части на три слагаемых:

$$u_R + u_C - U = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где 
$$u_R \equiv \int_l \vec{E} d\vec{l}, \quad u_C \equiv \int_d \vec{E} d\vec{l}, \quad U \equiv - \int_{L_0} \vec{E} d\vec{l}.$$

Первый интеграл вычисляется вдоль отрезка, занимаемого резистором, второй – вдоль отрезка, занимаемого конденсатором, а третий – вдоль отрезка, занимаемого источником сторонней ЭДС.

Внутри резистора течет ток проводимости, для которого справедлив дифференциальный закон Ома (1.8). Представим его в виде цилиндра длиной  $L_R$  и сечением  $s$  так, что  $u_R = I \cdot R$ , где  $R = l/(\sigma s)$  означает величину сопротивления.

Внутри конденсатора течет ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ , определяемый соотношением (1.9), т.е. имеет место оценка

$$\vec{D} = \int \vec{j}_{\text{см}} dt.$$

Обозначая далее расстояние между пластинами как  $d$ , а их площадь через  $S$ , можно записать, что

$$u_C \equiv \int_d \vec{E} d\vec{l} = \frac{d}{\epsilon_a} \int j_{\text{см}} dt.$$

Поскольку для замкнутой цепи ток везде один и тот же, то  $j_{\text{см}} S = I$ . В результате для конденсатора имеем

$$u_C \equiv \frac{1}{C} \int I dt.$$

Здесь через  $C \equiv \epsilon_a S/d$  обозначена емкость конденсатора.

С учетом всех сделанных оценок окончательно имеем

$$u_R + u_C + u_L = U,$$

где величины

$$u_R = I \cdot R, \quad u_C \equiv \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{и} \quad u_L = L \frac{\partial I}{\partial t} + M \frac{\partial I_m}{\partial t}$$

означают падения напряжения на соответствующих участках цепи, а  $U$  – суммарную ЭДС сторонних источников в замкнутой цепи.

Подводя итог сказанному, мы можем еще раз выразить свое почтение уравнениям Максвелла, которые максимально ёмким образом вобрали в себя все известные законы электромагнетизма, и уверенно пользоваться этими уравнениями как постулатами.

### 1.3. Уравнения Максвелла в симметричной форме

Если взглянуть на уравнения Максвелла с точки зрения математической симметрии, то можно отметить значительное подобие первого (1.1) и второго (1.2), третьего (1.3) и четвертого (1.4) уравнений. В значительной степени благодаря этому, Максвеллом и были введены токи смещения. Однако отмечаемое подобие не полное – во втором и четвертом уравнениях нет магнитных токов и зарядов. Магнитных зарядов нет и в природе, впрочем, и этого мы коснемся в заключительной главе 5 нашего курса, в них нет и нужды. Нет так нет, но математическая симметрия всегда полезна, и поэтому физики, в основном занимающиеся прикладной электродинамикой, вводят в уравнения симметрирующие члены в виде магнитных токов  $\vec{j}^{(m)}$  и зарядов  $\rho^{(m)}$ . В окончательных формулах их, в конце концов, обнуляют. Для того чтобы не путать их с настоящими электрическими токами и зарядами, те также помечают индексами:  $\vec{j}^{(e)}$  и  $\rho^{(e)}$ . После такой операции уравнения Максвелла записываются так (симметричная форма):

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}^{(e)}$	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} d\vec{s} + I^{(e)}$ (1.1s)
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{j}^{(m)}$	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{s} - I^{(m)}$ (1.2s)
$\operatorname{div} \vec{D} = \rho^{(e)}$	$\iint_S \vec{D} d\vec{s} = q^{(e)}$ (1.3s)
$\operatorname{div} \vec{B} = \rho^{(m)}$	$\iint_S \vec{B} d\vec{s} = q^{(m)}$ (1.4s)

Наряду с понятием токов электрической проводимости  $\vec{j}_{\text{пр}}^{(e)} = \sigma^{(e)} \vec{E}$ , вводится понятие токов магнитной проводимости  $\vec{j}_{\text{пр}}^{(m)} = \sigma^{(m)} \vec{H}$  и удельной магнитной проводимости  $\sigma^{(m)}$ .

После этой симметризации переход от первого уравнения Максвелла ко второму, от третьего уравнения к четвертому и наоборот осуществляется путем простой замены:

$$\begin{aligned} \vec{E} &\Leftrightarrow \vec{H}, \quad \varepsilon_0 \Leftrightarrow \mu_0, \\ \varepsilon &\Leftrightarrow -\mu, \quad \sigma^{(e)} \Leftrightarrow -\sigma^{(m)}, \\ \vec{j}^{(e)} &\Leftrightarrow -\vec{j}^{(m)}, \quad I^{(e)} \Leftrightarrow -I^{(m)}, \quad q^{(e)} \Leftrightarrow -q^{(m)}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Эти замены и составляют содержание принципа перестановочной двойственности.

Хотя проведенная симметризация уравнений в основе своей изначально является искусственной, чисто математической операцией, необходимо сделать два замечания:

- магнитные источники полей так же, как и электрические можно вводить как эквиваленты некоторым реальным процессам;
- симметрия уравнений отражает реальную симметрию полей при взаимной замене эквивалентных электрических и магнитных источников.

На эквивалентных источниках и симметрии полей мы остановимся далее.

#### 1.4. Граничные условия для электромагнитного поля

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме – это система дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. Независимыми переменными являются координаты и время точки наблюдения. Искомыми величинами являются компоненты векторов электромагнитного поля. Для их однозначного решения необходимо задание начальных и граничных условий. Эти условия можно получить из анализа уравнений Максвелла в интегральной форме. Дело в том, что изначально уравнения Максвелла были установлены именно в интегральной форме, и только при предельном переходе в них к бесконечно малым объемам была выведена их дифференциальная форма. Инте-

гральная же форма – это система интегральных уравнений, которая, как известно, не нуждается в задании начальных и граничных условий, поскольку они уже учтены. Проведем необходимый предельный переход, но вблизи границы раздела сред.

#### 1.4.1. Тангенциальные компоненты поля

Рассмотрим поведение поля вблизи границы раздела двух сред (рис. 8). Обратимся к первому уравнению Максвелла в симметричной интегральной форме (1.1s).

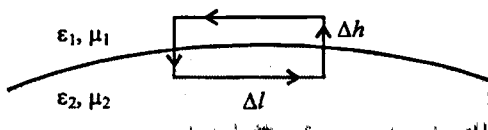


Рис. 8. К выводу граничных условий для тангенциальных компонент поля

Выберем контур интегрирования в левой части так, чтобы одна половина контура лежала в одном, а другая – в другом полупространстве. Полагая, что все стороны контура  $(\Delta h, \Delta l)$  достаточно малы, чтобы поле в пределах горизонтальных прямолинейных отрезков не менялось, устремляя  $\Delta h \rightarrow 0$ , запишем

$$H_{2\tau} \cdot \Delta l - H_{1\tau} \cdot \Delta l = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iint_S \vec{j}^{(e)} d\vec{s}, \quad (1.12)$$

где  $H_{1\tau}, H_{2\tau}$  – поверхностные тангенциальные компоненты напряженности магнитного поля в верхнем и нижнем полупространствах, т.е. проекция поля на касательную плоскость. Площадь сечения выделенного прямоугольника стягивается к нулю, поле при этом имеет конечное значение, поэтому интеграл от вектора электрической индукции устремляется к нулю. Интеграл от плотности тока может быть отличен от нуля, если существует т.н. поверхностный ток  $\vec{j}_s^{(e)}$ , для которого

$$\vec{j}^{(e)} = \vec{j}_s^{(e)} \delta(z).$$

Обычно  $\vec{j}_s^{(e)} \neq 0$ , только когда одна из сред обладает конечной проводимостью. Для идеальных диэлектриков  $\vec{j}_s^{(e)} = 0$ .



Поделив далее левую и правую части соотношения (1.12) на  $\Delta l$  и проведя предельный переход  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_s^{(e)}.$$

Поскольку контур интегрирования ориентирован произвольно относительно нормали к поверхности  $\vec{n}$ , то в общем случае можно записать

$$[\vec{n}, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{j}_s^{(e)}. \quad (1.13)$$

Пользуясь принципом перестановочной двойственности (1.11), для тангенциальных компонент электрического поля можно записать

$$[\vec{n}, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = -\vec{j}_s^{(m)}. \quad (1.14)$$

Обычно  $\vec{j}_s^{(m)} = 0$ , и поэтому

$$[\vec{n}, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0. \quad (1.15)$$

Полученный результат означает, что тангенциальные компоненты электрического поля при переходе границы раздела сред всегда непрерывны, в то время как тангенциальные компоненты магнитного поля меняются скачком, который зависит от величины поверхностного электрического тока.

#### 1.4.2. Нормальные компоненты поля

Граничные условия для нормальных компонент поля можно получить, если рассмотреть, например, третье уравнение Максвелла в интегральной форме (1.3s) для объема малого цилиндра, который наполовину находится в одном и наполовину в другом полупространстве (рис. 9).

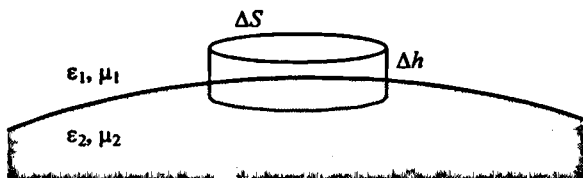


Рис. 9. К выводу граничных условий для нормальных компонент поля

Совершая предельный переход  $\Delta h \rightarrow 0$ , можно записать, что

$$D_{1n} \cdot \Delta S - D_{2n} \cdot \Delta S = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iiint_V \rho^{(e)} dV, \quad (1.16)$$

где через  $D_{1n} = \vec{D}_1 \vec{n}$  и  $D_{2n} = \vec{D}_2 \vec{n}$  обозначены проекции на нормаль  $\vec{n}$  векторов электрической индукции в верхнем и нижнем полупространствах. Конечно, при  $\Delta h \rightarrow 0$  объем выделенного цилиндра стягивается к нулю, но интеграл от плотности заряда может быть отличен от нуля, если существует т.н. поверхностная плотность заряда  $\rho_s^{(e)}$ , для которой

$$\rho^{(e)} = \rho_s^{(e)} \delta(z).$$

Обычно  $\rho_s^{(e)} \neq 0$ , только когда одна из сред обладает конечной проводимостью или нет сторонних поверхностных зарядов. Для идеальных диэлектриков  $\rho_s^{(e)} = 0$ .

Поделив далее левую и правую части соотношения (1.16) на  $\Delta S$  и проведя предельный переход  $\Delta S \rightarrow 0$ , получим

$$D_{1\tau} - D_{2\tau} = \rho_s^{(e)},$$

или в векторном виде

$$\vec{n}, (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s^{(e)}. \quad (1.17)$$

Пользуясь принципом перестановочной двойственности (1.11), для нормальных компонент магнитного поля можно записать

$$\vec{n}, (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \rho_s^{(m)}. \quad (1.18)$$

Поскольку реально  $\rho_s^{(m)} = 0$ , то отсюда следует, что

$$\vec{n}, (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0. \quad (1.19)$$

Полученный результат означает, что нормальная компонента вектора магнитной индукции при переходе границы раздела сред всегда непрерывна, в то время как нормальная компонента вектора электрической индукции меняется скачком, который зависит от величины плотности поверхностного заряда.

### 1.4.3. Импедансные условия и условия излучения

В случае, если одно из полупространств, например нижнее, обладает большой проницаемостью или проводимостью при задании граничных условий, поведение поля в нем мало влияет на поле в верхнем полупространстве. Тогда для поля в верхнем полупространстве используются импедансные граничные условия, которые записываются как

$$[\bar{n}\vec{E}] = +Z_s \bar{n} \vec{H}\bar{n}$$

и называются условиями Леонтовича. Здесь  $Z_s$  – поверхностный импеданс поверхности, который приближенно равен волновому сопротивлению нижней среды:  $Z_s \approx Z_a$ .

В частном случае идеально проводящей границы это означает, что на ней должны выполняться условия

$$[\bar{n}\vec{E}] = 0, \quad \bar{n}\vec{H} = 0.$$

В электродинамике часто рассматриваются поля в открытых или полукрытых областях, когда граница уходит на бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ). При этом используется т.н. граничное условие излучения А. Зоммерфельда, которое записывается как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( r\vec{E} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [\vec{r}\vec{H}] \right) = 0.$$

Физически оно означает, что поле на бесконечности убывает быстрее, чем  $1/r$ , и отраженное от бесконечности излучение отсутствует.

### 1.5. Вектор и теорема Пойнтинга

Определим вектор Пойнтинга пока чисто формально как векторное произведение  $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]$ . Размерность этого вектора определяется как произведение размерностей векторов, его образующих:

$$[\Pi] = [E] \cdot [H] = (\text{В/м})(\text{А/м}) = \text{Вт/м}^2.$$

Это означает, что вектор Пойнтинга имеет размерность мощности, приходящейся на единицу площади.

Для того чтобы выяснить смысл вектора Пойнтинга и заодно найти уравнение, которому он должен удовлетворять, вычислим расходимость (дивергенцию) этого вектора:

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \nabla [\vec{E} \vec{H}] = \vec{H} [\nabla \vec{E}] - \vec{E} [\nabla \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Подставим сюда из уравнений Максвелла (1.1) и (1.2) циркуляции (rot) векторов электромагнитного поля. В результате имеем

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{np}} + \vec{j}_{\text{ст}} \right),$$

$$\text{или} \quad p_{\text{ст}} = \operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) + \sigma E^2, \quad (1.20)$$

где обозначено  $p_{\text{ст}} \equiv -\vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{ст}}$ . Уравнение (1.20) называется уравнением (теоремой) Пойнтинга в дифференциальной форме. Его интегральная форма получается путем применения интегральной теоремы Остроградского – Гаусса к (1.20):

$$P_{\text{ст}} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV + \iiint_V \sigma E^2 dV, \quad (1.21)$$

где  $P_{\text{ст}} \equiv \iiint_V p_{\text{ст}} dV = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{j}_{\text{ст}} dV$  представляет собой мощность всех сторонних источников, которая выделяется внутри объема  $V$ .

Выясним физический смысл всех входящих в уравнение (1.21) членов. Начнем с последнего слагаемого. Подсчитаем работу, которую совершает поле в единицу времени над некоторым зарядом  $dq = \rho dV$ , занимающим элементарный объем  $dV$ . Эта величина равна

$$dP_{\text{пот}} = dq (\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]) \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \vec{E} dV = \vec{j}_{\text{np}} \vec{E} dV = \sigma E^2 dV$$

и описывает мощность электромагнитного поля, переходящую в джоулево тепло в элементарном объеме  $dV$ . Тогда на нагревание всего объема (тепловые потери) уйдет мощность

$$P_{\text{пот}} = \iiint_V \sigma E^2 dV.$$

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (1.21). Как известно, величины

$$w_e \equiv \frac{\epsilon_a E^2}{2} \quad \text{и} \quad w_m \equiv \frac{\mu_a H^2}{2}$$

представляет собой плотности электрической и магнитной энергии.

Объемные интегралы от них описывают полную электрическую и магнитную энергии, запасенные в объеме  $V$ :

$$W_e = \iiint_V w_e dv = \iiint_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dv \quad \text{и} \quad W_m = \iiint_V w_m dv = \iiint_V \frac{\mu_a H^2}{2} dv.$$

Тогда, очевидно, все второе слагаемое в (1.21) представляет собой скорость изменения запасенной в объеме  $V$  энергии электрического и магнитного типа.

В свете всего вышесказанного становится ясно, что интегральный член с вектором Пойнтинга описывает поток мощности, уходящей из объема  $V$  в виде излучения через поверхность  $S$ , его окружающую:

$$P_{\text{изл}} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}.$$

Окончательно уравнение (1.21) принимает вид

$$P_{\text{ст}} = P_{\text{изл}} + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) + P_{\text{пот}}, \quad (1.22)$$

обретая смысл теоремы Пойнтинга: «Мощность сторонних источников, выделяемая в некотором объеме, расходуется на изменение накопленной в объеме электромагнитной энергии, на потери в объеме и на излучение из объема» (рис.10).

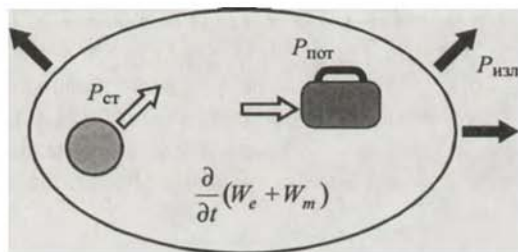


Рис. 10. Пояснение теоремы Пойнтинга

Дифференциальная форма теоремы Пойнтинга (1.20) имеет тот же смысл, но для единичного объема.

Теорема Пойнтинга является законом сохранения, точнее, законом баланса энергии для электромагнитного поля. Это очень важный и точный инструмент, позволяющий понять физику протекания многих про-

цессов. Далее мы рассмотрим два простых примера применения этой теоремы и затем используем её для доказательства новой теоремы – теоремы единственности решения уравнений Максвелла.

## 1.6. Накопление энергии в конденсаторе

В электрическом конденсаторе (рис. 11), находящемся под определенной разностью потенциалов  $u$ , начнем медленно сближать обкладки. Напряженность поля внутри конденсатора, определяемая как  $E = u/h$ ,

начнет увеличиваться. Как следствие, начнет увеличиваться плотность электрической энергии

$$w_e = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$$

со скоростью

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Общая энергия будет нарастать со скоростью

$$\frac{\partial W_e}{\partial t} = \epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} \pi a^2 h.$$

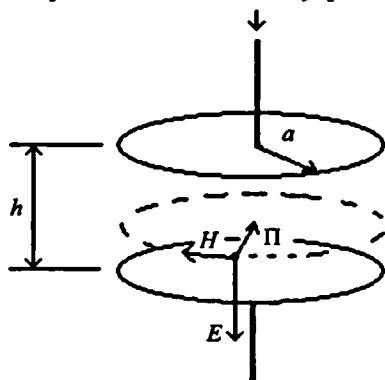


Рис. 11. Накопление энергии в конденсаторе

Спрашивается, каким путем энергия поступает в конденсатор? Первым приходящий ответ – по проводам – оказывается неверным.

Для ответа обратимся к теореме Пойнтинга (1.22). Сторонних источников в конденсаторе нет, нет и потерь. Исчезающе мала и накопленная магнитная энергия. Таким образом, теорема Пойнтинга в нашем случае дает

$$0 = P_{\text{изл}} + \frac{\partial}{\partial t} W_e. \quad (1.23)$$

Неожиданный вывод: энергия проникает внутрь конденсатора через поток вектора Пойнтинга. Подсчитаем его.

Внутри конденсатора электрическое поле пространственно однородно по всему сечению и изменяется только во времени. Раз изменяется электрическое поле, то появляется магнитное поле. Это поле будет обладать осевой симметрией и зависеть только от расстояния  $r$  до оси

конденсатора. Применяя для окружности радиуса  $a$  первое уравнение Максвелла в интегральной форме (1.1), можно записать, что

$$H 2\pi a = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} \pi a^2, \quad \text{или} \quad H = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} \frac{a}{2}.$$

Вычисляя теперь модуль вектора Пойнтинга, имеем

$$\Pi = EH = \epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} \frac{a}{2}.$$

Направлен этот вектор к центру конденсатора по радиусу (рис. 11). Поток этого вектора по боковой поверхности с учетом ориентации нормали равен

$$P_{\text{изл}} = -\epsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} \frac{a}{2} 2\pi a h.$$

Видно, что соотношение (1.23) действительно выполняется. Важно заметить, что поток вектора Пойнтинга через обкладки конденсатора равен нулю, поскольку там нормаль к поверхности и сам вектор просто ортогональны.

Нами вполне обоснованно получен новый результат: внутрь конденсатора электрическая энергия проникает через боковую поверхность.

## 1.7. Тепловые потери в проводнике

Рассмотрим еще один поучительный и не менее неожиданный пример по использованию теоремы Пойнтинга: по проводнику с потерями сверху вниз течет постоянный ток  $I$  и проводник нагревается (рис. 12). Подсчитаем выделяющуюся мощность на участке длиной  $h$ :

$$P_{\text{пот}} = \iiint_V \sigma E^2 dV = \sigma E^2 \pi a^2 h.$$

Здесь  $\sigma$  — удельная проводимость материала проводника. Выразим напряженность поля через величину тока с использованием закона Ома:

$$j = \frac{I}{\pi a^2} = \sigma E.$$

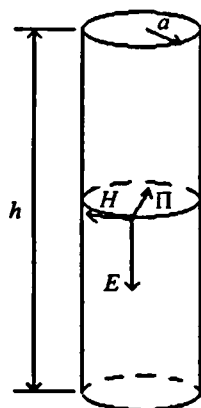


Рис. 12. Выделение энергии в проводнике

Тогда окончательно имеем

$$P_{\text{пот}} = \sigma \left( \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \right)^2 \pi a^2 h = \frac{I^2 h}{\pi a^2 \sigma}.$$

Спрашивается, каким путем энергия поступает в отрезок проводника для его нагревания? Кажущийся очевидным ответ – по проводам – оказывается, так же как и в предыдущем примере, неверным.

Снова обратимся к теореме Пойнтинга (1.22). Сторонних источников в проводнике нет. Поле не меняется во времени, а значит, не происходит накопления электромагнитной энергии внутри проводника. Таким образом, теорема Пойнтинга в нашем случае дает

$$0 = P_{\text{изл}} + P_{\text{пот}}. \quad (1.24)$$

Что же, опять все дело в векторе Пойнтинга? Это действительно так. Подсчитаем его и его поток внутри проводника.

Необходимое для расчета значение магнитного поля найдем с помощью ранее приводившегося интегрального закона Био – Савара – Лапласа

$$H = \frac{I}{2\pi a}.$$

В результате для вектора Пойнтинга и его потока через боковую поверхность имеем

$$\Pi = \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \frac{I}{2\pi a} = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}, \quad P_{\text{изл}} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} 2\pi a h = -\frac{I^2 h}{\pi a^2 \sigma}.$$

Соотношение (1.24) выполняется. Важно заметить, что вклады в  $P_{\text{изл}}$  через «донышки» проводника равны нулю, поскольку вектор Пойнтинга на них ортогонален нормали к поверхности.

Окончательный вывод имеет большое прикладное значение: энергия, а значит, и сигналы при протекании тока по проводам, переносятся электромагнитным полем, охватывающим проводник. Вот почему скорость передачи сообщений по проводам близка к скорости света, хотя сами носители зарядов, образующие ток, движутся со скоростью в несколько см/с.

Скорость биологических процессов в живых организмах еще ниже, и если бы управление по нейронам шло с этой скоростью, то жизни на Земле уже давно бы не было. Мы бы с вами просто не успевали «уворачиваться от неприятностей» окружающего мира. Отсюда вывод: живые



организмы управляются электромагнитными процессами. Вспомните сказку, в которой герой на вопрос, что быстрее всего на свете, отвечает: «Мысль». Верен и ответ «свет», поскольку это и есть скорость распространения электромагнитного поля.

### 1.8. Теорема единственности решения уравнений Максвелла

Рассмотрим еще одно применение теоремы Пойнтинга – доказательство теоремы единственности решения уравнений Максвелла, которая гласит: «Решение уравнений Максвелла единственно, если в начальный момент времени заданы значения поля во всех точках некоторого объема, а на границе этого объема заданы тангенциальные компоненты поля во все моменты времени».

Доказательство проведем от противного. Предположим, что условия теоремы выполняются, а тем не менее существуют два различных решения:  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  и  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ . Сформируем разностное поле, для которого  $\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ , и  $\vec{H}_3 \equiv \vec{H}_1 - \vec{H}_2$ . В силу линейности уравнений Максвелла это новое поле тоже является решением уравнений Максвелла, но для него будут нулевыми и начальные, и граничные условия. Поскольку разностное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, то оно также удовлетворяет теореме Пойнтинга:

$$P_{3,\text{ст}} = P_{3,\text{изл}} + \frac{\partial}{\partial t}(W_{3,e} + W_{3,m}) + P_{3,\text{пот}}.$$

Прежде всего, заметим, что поскольку сторонние источники одинаковы для первого и второго решений уравнений Максвелла, то для разностного поля эти источники нулевые, и значит  $P_{3,\text{ст}} = 0$ . Кроме того, для вектора Пойнтинга разностного поля на границе выделенного объема имеет место равенство

$$\vec{n}[\vec{E}_3 \vec{H}_3] = \vec{H}_3[\vec{n} \vec{E}_3] = \vec{E}_3[\vec{H}_3 \vec{n}] = 0,$$

которое выполняется в силу нулевых граничных условий для тангенциальных компонент разностного поля. Как следствие, имеем  $P_{3,\text{изл}} = 0$ .

В результате для разностного поля теорема Пойнтинга упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_{3,e} + W_{3,m}) = -P_{3,\text{пот}}.$$

Стоящее в правой части выражение в начальный момент времени равно нулю, а в последующие моменты времени может быть только отрицательным, поскольку потери не могут быть отрицательны:  $-P_{3,\text{пот}} \leq 0$ . Это означает, что энергия разностного поля не может увеличиваться, а в начальный момент времени энергия разностного поля равна нулю:  $(W_{3,e} + W_{3,m}) = 0$ . Энергия не может быть отрицательной. Отсюда следует, что в последующие моменты времени она тоже остается нулевой. Это означает, что  $\vec{E}_3 \equiv 0$ ,  $\vec{H}_3 \equiv 0$  или  $\vec{E}_1 \equiv \vec{E}_2$ , и  $\vec{H}_1 \equiv \vec{H}_2$ . Теорема доказана.

Заметим, что предложенное доказательство справедливо для конечного объема, поскольку тогда  $P_{3,\text{изл}} = 0$ . Однако это же условие будет выполняться для бесконечного объема, если вместо задания тангенциальных компонент поля во все моменты времени на границе конечного объема потребовать выполнения условия излучения на бесконечности. С этой оговоркой теорема единственности работает и для неограниченных объемов.

Зная, что решения единственны и существуют, можно смело браться за их поиск. Любое последовательно найденное решение будет единственным в том смысле, что не будет численно отличаться от любого другого. В смысле же формульных представлений отличия допустимы.

## Глава 2

### **ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЗАДАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

Итак, исходные уравнения электродинамики – уравнения Максвелла – записаны, необходимые для однозначности задачи дополнительные условия – материальные уравнения и граничные условия – определены, дело стало за «малым» – умением решить эти уравнения.

Решение системы дифференциальных уравнений Максвелла при заданных начальных и граничных условиях – не очень простая математическая задача, над которой работали многие поколения исследователей XIX и XX веков. Можно сказать, что благодаря этому развилась такая наука, как математическая физика. Фундаментальная трудность заключается в сложности физических процессов, которые возникают при излучении и приеме электромагнитных волн антенными системами и далее при дифракции и интерференции волн в реальных открытых и закрытых электродинамических структурах. Сложность процессов определяет сложность математического аппарата их описания. Простые и ясные решения получаются только для малого числа канонических задач. В общем случае решения представимы в виде бесконечных рядов, содержащих различные специальные функции. Анализ этих решений – самостоятельная вычислительная задача.

В настоящее время благодаря значительному прогрессу в развитии вычислительной техники наметилось существенное продвижение в численном решении электродинамических задач. Стало возможным прямое численное решение системы уравнений Максвелла практически при любых условиях. Точность вычислений можно регулировать и асимптотически найти практически точные результаты. Уже известно множество хорошо зарекомендовавших себя коммерческих вычислительных пакетов. Общим для всех пакетов является то, что сложные задачи требуют больших вычислительных и временных затрат. Малейшие изменения в исходных условиях вызывают необходимость практически заново

решать задачи. Для прогноза изменения направлений исследований или оптимизации решений требуется учитывать особенности протекающих физических процессов, а это можно сделать на относительно простых канонических примерах, допускающих аналитическое описание.

Так или иначе, сегодня необходимость получения замкнутых аналитических решений и их физической интерпретации не только не исчезает, но и усиливается.

## 2.1. Волновое уравнение для электромагнитного поля

Стандартный способ решения уравнений Максвелла – сведение их к волновым уравнениям, решение которых – относительно более простая задача.

Обратимся к уравнениям Максвелла в симметричной форме (1.1s – 1.4s). Применим ко второму из них операцию циркуляции:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} - \operatorname{rot} \vec{j}^{(m)}.$$

Поскольку  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$ , постольку с учетом первого и четвертого уравнений можно записать

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\operatorname{grad} \rho^{(e)}}{\epsilon_a} + \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}^{(e)} + \operatorname{rot} \vec{j}^{(m)}. \quad (2.1s)$$

Это и есть искомое волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля в симметричной форме. С учетом принципа перестановочной двойственности из (2.1s) можно записать волновое уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \vec{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{\operatorname{grad} \rho^{(m)}}{\mu_a} + \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}^{(m)} - \operatorname{rot} \vec{j}^{(e)}. \quad (2.2s)$$

Стоящий в левых частях этих уравнений дифференциальный оператор Даламбера удобно обозначить как

$$D^2 = \Delta - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Тогда, поскольку обычно магнитных токов и зарядов нет, волновые уравнения для напряженностей электрического и магнитного полей

переписываются в кратком виде:

$$D^2 \vec{E} = \frac{\text{grad } \rho}{\epsilon_a} + \mu_a \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{и} \quad D^2 \vec{H} = -\text{rot } \vec{j}. \quad (2.2)$$

Из курса «Методы математической физики» хорошо известно, что волновое уравнение описывает распространение волн, а множитель перед второй производной по времени определяет фазовую скорость распространения волны:  $v_\phi = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a} = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ . В случае свободного пространства (вакуума) эта скорость имеет значение  $v_\phi = c$ . Полученный результат позволил в свое время Максвеллу сделать вывод о существовании электромагнитных волн, которые к тому же распространяются со скоростью света. С этого и началась радиофизика!

## 2.2. Скалярный и векторный потенциалы

Как видно из (2.1) и (2.2), источниками для поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  являются не сами токи и заряды, а их комбинация. Даже если источники простые, для нахождения решения требуется решать все шесть уравнений. Это несколько затрудняет анализ решений волновых уравнений. Иногда удобней сначала находить вспомогательные функции (потенциалы), часто состоящие из одной компоненты, а уж затем по ним путем дифференцирования восстанавливать поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Нужно только удачно подобрать эти функции.

Глядя на четвертое уравнение Максвелла (1.4), можно догадаться, что для того чтобы оно всегда удовлетворялось, поле  $\vec{B}$  должно быть обязательно циркуляцией какой-нибудь функции:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.3)$$

В пользу этого говорит то, что всегда  $\text{div rot } \vec{A} = 0$ . Равенство (2.3) означает, что магнитное поле всегда вихревое, т.е. силовые линии магнитного поля замыкаются сами на себя.

Если подставить представление (2.3) во второе уравнение Максвелла (1.2), то получаем, что должно выполняться равенство

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Учитывая равенство  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$ , снова угадываем, что стоящая под циркуляцией функция является потенциальной, т.е.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

или иначе 
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.4)$$

Еще не решая уравнения Максвелла, мы уже нашли формы решений (2.3) и (2.4) через вспомогательные функции  $\vec{A}$  и  $\varphi$ , которые называются соответственно векторный и скалярный потенциалы. Осталось найти сами потенциалы.

Задав (2.3) и (2.4), мы уже использовали второе и четвертое уравнения Максвелла. Неиспользованными остались первое и третье уравнения. Подставим в них введенные представления. В результате из первого уравнения Максвелла (1.1) имеем

$$D^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (2.5)$$

а из третьего (1.3)

$$D^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2.6)$$

На первый взгляд, эти уравнения ничуть не проще, чем (2.1) и (2.2). Однако заметим, что, используя, например, соотношение (2.4) для нахождения поля  $\vec{E}$ , мы вынуждены знать обе функции  $\vec{A}$  и  $\varphi$ . Иначе говоря, чтобы определить три скалярные функции поля, мы нуждаемся в задании четырех независимых скалярных функций. Как говорят математики, явно присутствует лишняя степень свободы. Воспользуемся ею и свяжем удобным нам образом четыре скалярных функции, входящие в  $\vec{A}$  и  $\varphi$ :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Эта связь называется калибровкой Лоренца.

При использовании калибровки Лоренца уравнения для потенциалов (2.5) и (2.6) существенно упрощаются:

$$D^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j}; \quad (2.8)$$

$$D^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (2.9)$$

Сделаем два важных замечания:

1. Хотя определенные нами потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$  уже связаны между собой калибровкой Лоренца, тем не менее они могут быть найдены лишь с точностью до некоторой функции, которая при дифференцировании в (2.3) и (2.4) сократится. Действительно, если ввести поправку

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' \equiv \vec{A} + \text{grad } \psi,$$

то поскольку  $\text{rot grad } \psi = 0$ , поле  $\vec{B}$  не изменится. Чтобы при этом не изменилось и поле  $\vec{E}$ , необходимо изменить  $\varphi \rightarrow \varphi'$ . При этом должно быть

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \text{grad } \varphi'.$$

Подставляя сюда выражение для  $\vec{A}'$ , находим

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Однако и старые  $\vec{A}$ ,  $\varphi$ , и новые  $\vec{A}'$ ,  $\varphi'$  должны удовлетворять калибровке Лоренца (2.7). Простой подстановкой убеждаемся, что это может быть только в случае, когда функция  $\psi$  удовлетворяет однородному волновому уравнению  $D^2\psi = 0$ . Иначе говоря, потенциалы находятся с точностью до волновой функции.

2. Даже если отсутствуют заряды ( $\rho = 0$ ) как источники, это не значит, что можно положить  $\varphi = 0$ . Чтобы удовлетворялась калибровка Лоренца, скалярный потенциал тоже должен быть отличен от нуля. В этом случае калибровка Лоренца выступает как уравнение для потенциала  $\varphi$ .

### 2.3. Вектор Герца

Сделанные в конце предыдущего раздела замечания вынуждают продолжить поиск удобных потенциальных функций, которые бы позволяли преодолеть все отмеченные сложности, в частности избавиться от необходимости постоянной проверки калибровки Лоренца. Такая функция была найдена Герцем и получила его имя – вектор Герца  $\vec{G}$ .

Оказалось, что достаточно определить

$$\vec{A} = \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} \text{ и } \varphi = -\operatorname{div} \vec{\Gamma} \quad (2.10)$$

и калибровка Лоренца удовлетворяется автоматически. При этом векторы электромагнитного поля находятся как

$$\vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{\Gamma}; \quad (2.11)$$

$$\vec{E} = -\epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma}. \quad (2.12)$$

Уравнение, которому удовлетворяет вектор Герца, получается простой подстановкой (2.10) и имеет вид

$$D^2 \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_a},$$

или после интегрирования по времени имеет волновое уравнение

$$D^2 \vec{\Gamma} = -\frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \vec{j} dt. \quad (2.13)$$

Соотношение (2.12) с учетом уравнения (2.13) может быть несколько упрощено:

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Gamma} - \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \vec{j} dt. \quad (2.12')$$

Сделаем два замечания:

1. За внешнюю простоту формул с введением вектора Герца приходится расплачиваться необходимостью выполнения двойного дифференцирования, чтобы вычислить компоненты поля.

2. Вектор Герца часто называют вектором Фитцджеральда и поляризационным потенциалом. Для пояснения последнего рассмотрим случай, когда в первом уравнении Максвелла вообще отсутствуют токи носителей заряда и есть только токи смещения:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Выделим вектор поляризуемости из вектора электрической индукции:  $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ . В этом случае первое уравнение Максвелла переписывается



сывается как

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}.$$

В этом случае вектор Герца удовлетворяет волновому уравнению вида

$$D^2 \bar{\Gamma} = -\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0},$$

т.е. роль источника здесь играет вектор поляризуемости. Это обстоятельство и оправдывает название – поляризационный потенциал для вектора Герца.

## 2.4. Решение однородного волнового уравнения

Из вышеизложенного видно, что, так или иначе, решение уравнений Максвелла сводится к решению волнового уравнения. Рассмотрим простейший вариант волнового уравнения – однородное волновое уравнение для некоторой волновой функции  $\Phi$ :

$$D^2 \Phi = 0, \text{ или } \Delta \Phi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

В качестве функции может выступать одна из компонент рассмотренных выше векторов.

Перепишем это уравнение в сферической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Предположим, что задача обладает сферической симметрией  $\Phi = \Phi(r, t)$ . Тогда волновое уравнение переписывается как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Введем здесь замену переменных  $\Psi = r\Phi$  и обозначим  $\varepsilon_a \mu_a = 1/c^2$ . В этом случае волновое уравнение принимает каноническую форму

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{c^2 \partial t^2} = 0.$$

Проведем решение этого уравнения методом характеристик Даламбера, согласно которому введем новые переменные (характеристики, или фазы):

$$\xi = r - ct, \quad \eta = r + ct.$$

В новых переменных волновое уравнение переписывается как (вторая каноническая форма уравнений гиперболического типа):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение один раз по  $\eta$ :  $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = f(\xi)$  – и затем по  $\xi$ :

$$\Psi = \int f(\xi) d\xi + F_2(\eta) \equiv F_1(\xi) + F_2(\eta).$$

Здесь  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\eta)$  – произвольные функции.

Возвращаясь к старым переменным, окончательно имеем общее решение однородного волнового уравнения в случае сферической симметрии:

$$\Phi(r, t) = \frac{F_1(r - ct)}{r} + \frac{F_2(r + ct)}{r}.$$

Первое слагаемое описывает т.н. уходящую сферическую волну, а второе – приходящую. Оба слагаемых убывают с расстоянием обратно пропорционально расстоянию от центра симметрии. Фазовый фронт и уходящей, и приходящей сферических волн – поверхность сферы.

Если исходное волновое уравнение решать в предположении осевой симметрии, то общее решение в виде уходящих и приходящих цилиндрических волн будет записываться как

$$\Phi(\rho, t) = \frac{F_1(\rho - ct)}{\sqrt{\rho}} + \frac{F_2(\rho + ct)}{\sqrt{\rho}},$$

где  $\rho$  – полярный радиус. Оба слагаемых убывают с расстоянием обратно пропорционально корню квадратному из расстояния до центра симметрии. Фазовые фронты и уходящей, и приходящей цилиндрических волн – поверхности цилиндра.

Если исходное волновое уравнение решать в предположении зависимости только от одной пространственной координаты  $x$ , то общее решение в виде уходящих и приходящих плоских волн будет записываться как

$$\Phi(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct).$$

Оба слагаемых не убывают с расстоянием от начала координат. Фазовые фронты и уходящей, и приходящей плоских волн – плоскости, перпендикулярные оси  $Ox$ .

В случае неоднородных уравнений или несимметричных задач решения могут быть представлены в виде суперпозиции перечисленных канонических решений.

## 2.5. Решение в запаздывающих потенциалах

Представим себе одномерное (скалярное) неоднородное волновое уравнение

$$D^2\Phi = -M(\vec{r}, t), \text{ или } \left( \Delta - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi = -M(\vec{r}, t),$$

правая часть которого описывает распределенный источник волны. Для простоты рассмотрим случай однородного безграничного пространства. Решать это уравнение будем методом интегральных преобразований Фурье.

Сначала применим одномерное преобразование Фурье по времени:

$$\underline{\Phi}(\vec{r}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt, \quad \underline{M}(\vec{r}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} M(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt.$$

В результате волновое уравнение преобразуется в т.н. уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) \underline{\Phi} = -\underline{M}(\vec{r}, \omega),$$

где через  $k \equiv \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  обозначено т.н. волновое число. Важно заметить, что уравнение Гельмгольца является уравнением эллиптического типа, в то время как исходное волновое уравнение было гиперболического типа.

Следующий шаг – трехмерное преобразование Фурье по пространственным переменным:

$$\underline{\underline{\Phi}}(\vec{k}, \omega) \equiv \iiint \underline{\Phi}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) (d^3\vec{r}),$$

$$\underline{\underline{M}}(\vec{k}, \omega) \equiv \iiint \underline{M}(\vec{r}, \omega) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) (d^3\vec{r}).$$

Уравнение Гельмгольца при этом трансформируется в алгебраическое уравнение вида

$$(-\kappa^2 + k^2)\Phi = -M(\bar{\kappa}, \omega).$$

Решение записанного уравнения осуществляется простым делением:

$$\Phi = \frac{M(\bar{\kappa}, \omega)}{(\kappa^2 - k^2)}.$$

Осталось выполнить обратные преобразования Фурье по всем переменным в обратном порядке.

Сначала заметим, что функция

$$G(\bar{r}, \omega) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{\exp(i\bar{\kappa}\bar{r})}{k^2 - \kappa^2} (d^3\bar{r}) = \frac{\exp(ik|\bar{r}|)}{4\pi|\bar{r}|}$$

представляет собой известную из курса «Методы математической физики» функцию Грина, т.е. поле точечного монохроматического источника с частотой  $\omega = k/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ . Используя теорему о свертке, запишем обратное преобразование по пространственной частоте для найденного решения:

$$\Phi(\bar{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \Phi(\bar{\kappa}, \omega) \exp(i\bar{\kappa}\bar{r}) (d^3\bar{\kappa}) = G(\bar{r}, \omega) * M(\bar{r}, \omega),$$

или в развернутом виде

$$\Phi(\bar{r}, \omega) = \iiint \frac{\exp(ik|\bar{r} - \bar{r}'|)}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} M(\bar{r}', \omega) (d^3\bar{r}').$$

Вспоминая, что  $k \equiv \omega/c$ , осуществим последнюю операцию – обратное преобразование по временной частоте:

$$\Phi(\bar{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\bar{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \iiint \frac{M\left(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} (d^3\bar{r}'). \quad (2.14)$$

Полученное решение известно как решение в запаздывающих потенциалах, поскольку время наблюдения результата возмущений и время появления возмущения в источнике отличаются на время распространения этого возмущения со скоростью  $c$  (рис. 13).

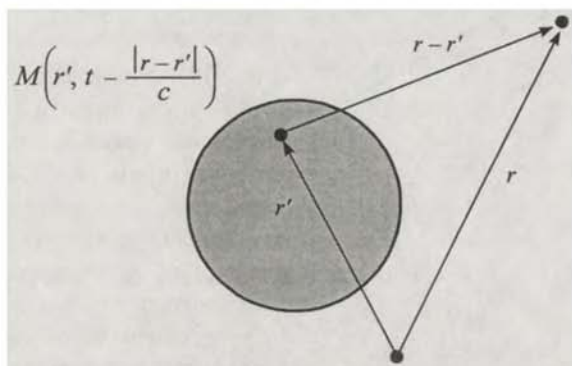


Рис. 13. Пояснение решения  
в запаздывающих потенциалах

В качестве примера рассмотрим решение волнового уравнения для векторного потенциала  $\vec{A}$ , источником для которого является функция  $\vec{M}(\vec{r}, t) = \mu_a \vec{j}(\vec{r}, t)$ . Решение в запаздывающих потенциалах в этом случае имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_a \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} (d^3\vec{r}').$$

Для вектора Герца источником является интеграл

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_a} \int_0^t \vec{j} dt,$$

а сам вектор записывается как

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_a} \iiint \frac{\int_0^{\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}} \vec{j}(\vec{r}', t') dt'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} (d^3\vec{r}'). \quad (2.15)$$

## 2.6. Дифференциальный закон Био – Савара – Лапласа

Рассмотрим элементарный участок проводника с током. Пусть площадь сечения этого проводника постоянна и равна  $S$ , а длина  $l$ . Через

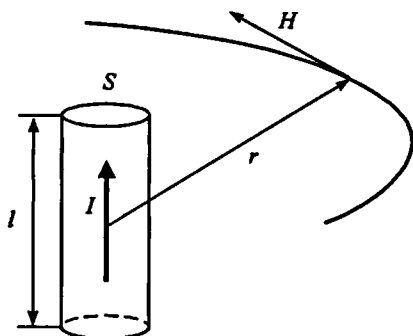


Рис. 14. Дифференциальный закон Био – Савара – Лапласа

проводник течёт постоянный ток  $\vec{I}$  (рис. 14). Найдём поле  $\vec{H}$ , создаваемое проводником с током в произвольной точке пространства с радиус-вектором  $\vec{r}$ . Будем считать расстояние от проводника до точки наблюдения  $r$  много больше размеров самого проводника. Это позволяет считать проводник материальной точкой и в соответствии с полученным в предыдущем разделе выражением для векторного потенциала записать

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_a \frac{\vec{j}\left(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r}|}{c}\right)}{4\pi|\vec{r}|} Sl = \mu_a \frac{\vec{I}}{4\pi r} l.$$

Зная потенциал, мы можем найти напряженность магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{A} = \frac{l}{4\pi} \left[ \nabla, \frac{\vec{I}}{r} \right] = \frac{l}{4\pi} \left[ \nabla \frac{1}{r}, \vec{I} \right].$$

Далее, поскольку

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{e}, \text{ где } \vec{e} \equiv \frac{\vec{r}}{r},$$

то мы можем записать окончательное выражение для магнитного поля  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{l}{4\pi r^2} [\vec{I}, \vec{e}].$$

Это выражение представляет собой математическую запись закона Био – Савара – Лапласа в дифференциальной форме.

## 2.7. Элементарный электрический диполь

### 2.7.1. Вектор Герца диполя

Рассмотрим простейший источник электромагнитного поля, называемый элементарный электрический диполь Герца (рис. 15). Это два точечных, одинаковых по величине, но противоположных по знаку

заряда  $+q$  и  $-q$ , находящихся на таком расстоянии  $\vec{d}$  между собой, что размер диполя  $d$  всегда много меньше, чем расстояние от центра диполя до точки наблюдения  $r$ . Дипольным моментом диполя называется величина, равная  $\vec{P} = q\vec{d}$ .

Будем считать, что диполь сохраняет свою ориентацию, но относительно медленно меняет свою длину  $d = d(t)$ , например, удлиняется или сжимается. Это движение можно интерпретировать как элементарный участок тока длиной  $d$ :

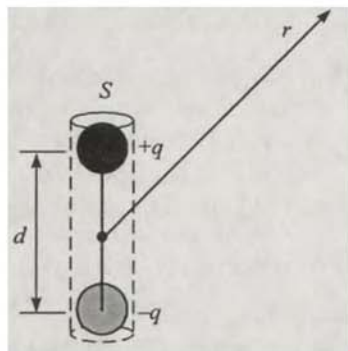


Рис. 15. Диполь Герца

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q \frac{d\vec{d}}{dt} = -I\vec{d} = -\vec{j}Sd, \quad (2.16)$$

где  $S$  – сечение мысленной трубки, внутри которой перемещаются заряды;  $I$  – эквивалентный ток, а  $\vec{j}$  – его плотность (рис. 15). Соотношение (2.16) позволяет записать, что

$$\int_0^l \vec{j} dt = -\frac{\vec{P}}{Sd} \equiv -\vec{p}. \quad (2.17)$$

Здесь через  $\vec{p}$  обозначена т.н. плотность дипольного момента, т.е. дипольный момент, приходящийся на единицу объема.

С учетом введенного обозначения (2.17) общее решение для вектора Герца (2.15) может быть переписано как

$$\vec{\Gamma}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{\epsilon_a} \iiint \frac{\vec{p}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} (d^3\vec{r}'). \quad (2.18)$$

Применительно к элементарному диполю можно считать распределение плотности дипольного момента подобным  $\delta$ -функции так, что

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \vec{P}(t)\delta(\vec{r}),$$

и тогда вектор Герца для элементарного диполя записывается просто как

$$\vec{\Gamma}(\vec{r}, t) = \frac{-\vec{P}(t - r/c)}{4\pi\epsilon_a r}. \quad (2.19)$$

### 2.7.2. Стационарный диполь

Случай стационарного элементарного диполя ( $\vec{P} = \text{const}$ ) получается в электродинамике как результат формального предельного перехода при устремлении  $c \rightarrow \infty$ . Очевидно, все запаздывания сигналов при этом исчезают, исчезает и сама временная зависимость. Согласно (2.19), вектор Герца для неподвижного диполя записывается как

$$\vec{\Gamma}(\vec{r}) = \frac{-\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Значения компонент электромагнитного поля находятся согласно (2.11) и (2.12). Как и должно быть для неподвижных зарядов, получаем  $\vec{H} = 0$ , а для электрического поля последовательно записываем

$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Gamma} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left( \vec{P} \frac{\vec{r}}{r^3} \right),$$

и далее

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{e}\vec{P})\vec{e} - \vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.20)$$

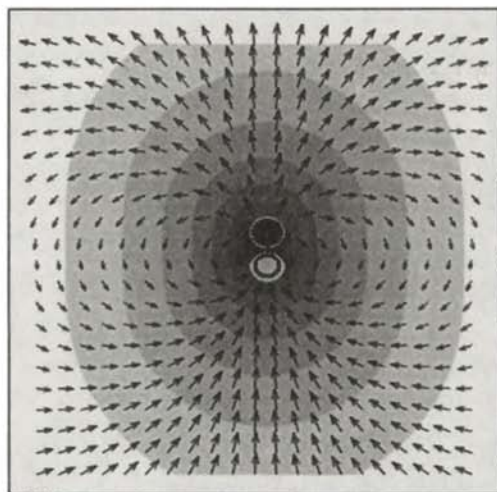


Рис. 16. Поле диполя Герца

На рис. 16 приведен вид силовых линий напряженности электрического поля, рассчитанный по формуле (2.20) с использованием приведенной в Приложении 2 программы на языке MathCAD2001. Важно иметь в виду, что в целом электростатическое поле диполя убывает с расстоянием очень быстро — обратно пропорционально третьей степени расстояния до точки наблюдения ( $1/r^3$ ). На рис. 16 это убывание изображено в логарифмическом масштабе.



### 2.7.3. Колеблющийся диполь

Если диполь Герца движется, например колеблется, то вектор Герца для него задается тем же самым выражением (2.19). Однако, поскольку его дипольный момент изменяется во времени  $\vec{P} = \vec{P}(t)$ , то существенным образом меняется структура создаваемого электромагнитного поля. Прежде всего появляется отличное от нуля магнитное поле. Вычислим его согласно (2.11):

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi} \text{rot} \left( \frac{\dot{\vec{P}} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r} \right).$$

Здесь для производной по времени введено краткое обозначение в виде точки сверху:

$$\dot{\vec{P}}(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(t).$$

Выполним последовательно необходимые векторные дифференцирования:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ \dot{\vec{P}} \text{grad} \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \text{rot} \dot{\vec{P}} \right\},$$

и далее

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\vec{r}}{r^3} \dot{\vec{P}} \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\vec{r}}{cr} \ddot{\vec{P}} \right] \right\} = \left[ \frac{\vec{e} \dot{\vec{P}}}{4\pi r^2} \right]. \quad (2.21)$$

Здесь введено важное для дальнейшего обозначение

$$\vec{P}_*(\vec{r}, t) \equiv \vec{P} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \dot{\vec{P}} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right), \quad (2.22)$$

так что и

$$\dot{\vec{P}}_*(\vec{r}, t) = \dot{\vec{P}} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \ddot{\vec{P}} \left( \vec{r}, t - \frac{r}{c} \right). \quad (2.23)$$

Будем называть вектор  $\vec{P}_*(\vec{r}, t)$  приведенным дипольным моментом. Вектор же  $\vec{e} \equiv \vec{r}/r$ , как и раньше, означает единичный вектор.

Вычисление напряженности электрического поля можно выполнить аналогично по формуле (2.12), подставив в неё (2.19):

$$\vec{E} = \frac{\mu_a}{4\pi r} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi \epsilon_a} \text{grad} \text{div} \frac{\vec{P}}{r}.$$

В результате последовательных вычислений получается формула

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{3(\vec{e}\vec{P}_e)\vec{e} - \vec{P}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \vec{e} \left[ \ddot{\vec{P}} \right] \right]. \quad (2.24)$$

Видно, что для колеблющегося диполя поле обладает существенно большей сложностью: появилось магнитное поле, а у электрического поля появились члены, убывающие с разной скоростью от расстояния. И это притом, что исходный вектор Герца убывает строго как  $1/r$ . Напомним те ограничения, при которых получены окончательные формулы (2.21) и (2.24). Этих ограничений всего два:

1. Элементарность диполя  $d \ll r$ .
2. Не слишком быстрые изменения диполя  $v \equiv \dot{d} \ll c$ .

### 2.7.3.1. Ближняя зона – квазистатическое решение

Начнем анализ полученных выражений с т.н. ближней зоны, примыкающей к источнику – колеблющемуся диполю Герца. Введем характерное время изменения диполя  $\tau$ . Таким временем может быть, например,  $\tau = d/\dot{d}$ . Для определенности будем называть ближней зоной область, в пределах которой расстояние  $r \leq c\tau \equiv r_0$ .

Сразу заметим, что если точка наблюдения находится в ближней зоне, то приведенный дипольный момент, входящий в выражения для поля, практически не имеет запаздывания. Действительно, разлагая (2.22) в ряд по степеням малости  $r$ , имеем

$$\vec{P}_e(\vec{r}, t) \equiv \vec{P}(\vec{r}, t) + O^2\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (2.25)$$

Поправка имеет второй порядок малости, а не первый (!), как это могло бы быть. В ближней зоне электрическое и магнитное поля не имеют запаздывания, как и в статическом случае.

Отбросив члены более высокого порядка малости из (2.21) и (2.24), можно записать

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{[\vec{e}\dot{\vec{P}}(t)]}{4\pi r^2}, \quad \vec{E} = \frac{3(\vec{e}\vec{P}(t))\vec{e} - \vec{P}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2.26)$$

Первое представление в (2.26) эквивалентно дифференциальному закону Био – Савара – Лапласа как для постоянного тока, а второе – полю

стационарного диполя (2.20), вид силовых линий которого показан на рис. 16. Вся ближняя зона работает синхронно: все, что изменилось в источнике, сразу же проявляется во всей ближней зоне без запаздывания. Иначе говоря, ближняя зона работает как целое – как область, где формируется поле излучения. Иногда в литературе эту область называют каузальной (причинной), и в этом есть большой смысл.

Если рассчитывать плотность электрической и магнитной энергий в ближней зоне, то, очевидно, доминировать будет электрическая энергия. Это следует из того, что с уменьшением расстояния электрическое поле нарастает быстрее ( $1/r^3$ ), чем магнитное поле ( $1/r^2$ ). Характерно, что в ближней зоне колебания электрической и магнитной энергий будут иметь сдвиг между собой по времени, равный четверти периода. Об этом мы поговорим подробнее, когда будем рассматривать гармонические поля.

### 2.7.3.2. Дальняя зона – поле излучения

Дальняя зона возникает, когда расстояние до точки наблюдения становится ощутимо большим:  $r \gg ct \equiv r_0$ . Согласно (2.23), при этом

$$\dot{\vec{P}}_*(\vec{r}, t) = \frac{r}{c} \ddot{\vec{P}}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right),$$

и тогда

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr} \left[ \vec{e} \ddot{\vec{P}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right], \text{ и } \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[ \vec{e} \left[ \ddot{\vec{P}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] \right]. \quad (2.27)$$

Отметим несколько важных свойств этих полей:

1. Напряженности поля убывают с расстоянием как  $1/r$ , а это существенно медленней, чем для квазистатических полей.
2. Напряженности поля меняются синхронно и пропорционально второй производной от дипольного момента, т.е. прямо пропорционально ускорению зарядов в диполе.
3. Векторы напряженности электрического и магнитного полей ортогональны друг другу и ортогональны направлению распространения.
4. Векторы напряженностей электрического и магнитного полей взаимосвязаны:

$$\vec{E} = Z_0 [\vec{e} \vec{H}],$$

где 
$$Z_a = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} Z_0, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

– волновые сопротивления среды и свободного пространства (вакуума) соответственно.

5. Вектор Пойнтинга направлен по радиусу от источника:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] = Z_a H^2 \vec{e}. \quad (2.28)$$

6. Плотность электрической и магнитной энергий совпадают. Действительно,

$$w_e = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\epsilon_a Z_a^2 H^2}{2} = \frac{\mu_a H^2}{2} = w_m.$$

Электромагнитное поле, удовлетворяющее условиям (1) – (6), называется полем излучения. Такое поле равнозначно свободно распространяющейся электромагнитной волне, которая уже не нуждается в источнике излучения.

Заметим, что для электрического диполя Герца создаваемое поле зависит от направления распространения волны как  $F(\vartheta) \equiv \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  – угол, отсчитываемый от оси диполя в направлении на источник. Это видно из формулы (2.27). Если вычислить вектор Пойнтинга, то для него, очевидно, распределение пропорционально:

$$F^2(\vartheta) \equiv \frac{\Pi}{\max \Pi} = \sin^2 \vartheta.$$

Эта функция называется диаграммой направленности электрического диполя по мощности. Максимум излучения приходится на угол  $\vartheta = \pi/2$ , минимум – на  $\vartheta = 0$ .

На рис. 17 показано распределение силовых линий поля излучения в дальней зоне, рассчитанное по программе, приведенной в Приложении 3. Сравнивая ближнюю и дальнюю зоны, следует отметить, что квазистатическая картина (рис. 16) имеет место только в пределах ближней зоны. При этом энергия (главным образом, электрическая) сосредоточена вблизи самого источника, и на границе ближней зоны её существенно меньше. При переходе границы ближней зоны формируется поле излучения (свободно распространяющаяся волна), распределение поля в пределах которой имеет существенно иной вид (рис. 17).

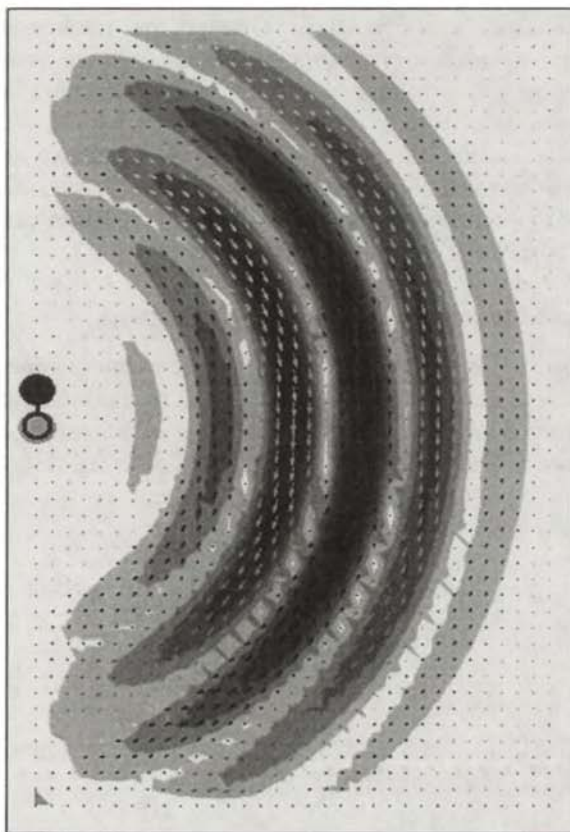


Рис. 17. Поле в дальней зоне

Если говорить при этом о векторе Пойнтинга, то он резко трансформируется и становится направленным строго по радиусу от источника. Причина этого «спрятана» в соотношении (2.25). Сначала запаздывания нет, но потом оно резко возникает. Поток электромагнитной энергии начинает как бы «выплескиваться» за пределы каузальной (ближней) зоны. Если проследить в этом месте за поведением максимума вектора Пойнтинга, то он, ускоряясь от нуля в начале (центре диполя), достигает на границе ближней зоны своей законной скорости – скорости света, с которой и продолжает свое дальнейшее движение. Возникает впечатление, что в пределах каузальной области скорость движения энергии

становится больше скорости света. Однако это происходит только в пределах длительности импульсного объема. Сам же этот объем движется со скоростью, в точности равной скорости света, и нарушения теории относительности нет.

Приведенные выше утверждения являются несколько необычными и в учебниках по электродинамике обычно не приводятся. Желающие могут проследить процесс возникновения поля излучения самостоятельно с помощью программы, приведенной в Приложении 3.

### 2.7.4. Излучение ускоренно движущегося заряда

Если мысленно один из зарядов в диполе зафиксировать, например  $-q$ , и считать, что движется только заряд  $+q$ , то для поля излучения ничего не изменится. Соотношения (2.26) и все остальные выражения для поля излучения сохранятся. Достаточно лишь сделать замену

$$\bar{P}\left(t - \frac{r}{c}\right) = q\bar{a}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где  $\bar{a}$  – вектор ускорения заряда. В результате для поля излучения заряда имеем:

$$\bar{H}(\bar{r}, t) = \frac{q}{4\pi cr} \left[ \bar{e}\bar{a}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right], \quad \bar{E}(\bar{r}, t) = Z_a \left[ \bar{e}\bar{H}(\bar{r}, t) \right].$$

Для вектора Пойнтинга поля излучения ускоренно движущегося заряда согласно (2.28) имеем

$$\bar{\Pi} = Z_a \left( \frac{q}{4\pi cr} \right)^2 [\bar{e}\bar{a}]^2 \bar{e}.$$

Согласно (2.28) и с учетом (2.27), для вектора Пойнтинга поля излучения можно записать

$$\bar{\Pi} = \bar{e} \frac{\mu_a}{c} \left( \frac{qa}{4\pi r} \right)^2 F^2(\vartheta).$$

Здесь  $F(\vartheta) = \sin^2 \vartheta$  – его диаграмма направленности по мощности. Полная мощность излучения вычисляется как

$$P_{\text{изл}} = \oint_S \bar{\Pi} d\bar{s} = \frac{\mu_a}{c} \left( \frac{qa}{4\pi} \right)^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_a}{c} (qa)^2.$$

Справедливости ради необходимо отметить, что полученная формула справедлива при не слишком больших скоростях движения заряда ( $V \ll c$ ). Несколько забегаая вперед, заметим, что при релятивистских скоростях формула уточняется:

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{6\pi} \frac{\mu_a}{c} (qa)^2 \frac{1}{(1-\beta^2)^3}, \quad \beta \equiv \frac{V}{c}.$$

В любом случае мощность излучения прямо пропорциональна квадрату ускорения заряда. На излучение расходуется полная энергия движущегося заряда (частицы).

Излучая, ускоренно движущийся заряд теряет кинетическую энергию и притормаживается. Этому процессу можно сопоставить силу радиационного трения  $\bar{R}$ . Оценим эту силу, полагая, что ускорение заряда происходит в течение короткого промежутка времени от  $t_1$  до  $t_2$ .

Из закона сохранения энергии можно записать, что кинетическая энергия движения изменится на величину работы силы радиационного трения:

$$\int \bar{R} d\vec{r} = - \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{изл}} dt.$$

Учитывая здесь равенство

$$\left( \frac{d\vec{V}}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left( \vec{V} \frac{d}{dt} \vec{V} \right) - \vec{V} \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \vec{V}$$

и полагая, что

$$\vec{V}(t_1) \approx \vec{V}(t_2), \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(t_1) = \frac{d}{dt} \vec{V}(t_2) = 0,$$

запишем

$$\int \bar{R} d\vec{r} = \frac{q^2 \mu_a}{6\pi c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \int \frac{d^2 \vec{V}}{dt^2} d\vec{r}.$$

Отсюда для силы радиационного трения имеем

$$\bar{R} = \frac{q^2 \mu_a}{6\pi c} \frac{1}{(1-\beta^2)^3} \frac{d^2 \vec{V}}{dt^2}.$$

## 2.8. Элементарный магнитный диполь

Под магнитным диполем обычно понимают рамку с током. Как известно, такая рамка ведет себя подобно магниту, обладающему магнитными полюсами. Магнитный диполь тогда считается элементарным, когда его размеры много меньше, чем расстояние до точки наблюдения  $r$ . Поскольку при этом не принципиально, какую форму имеет рамка, будем считать, что она образует замкнутую окружность радиуса  $a \ll r$  (рис. 18). Сечение проводника рамки равно  $s$ , а по рамке течет ток  $I$ , зависящий только от времени  $I = I(t)$ .

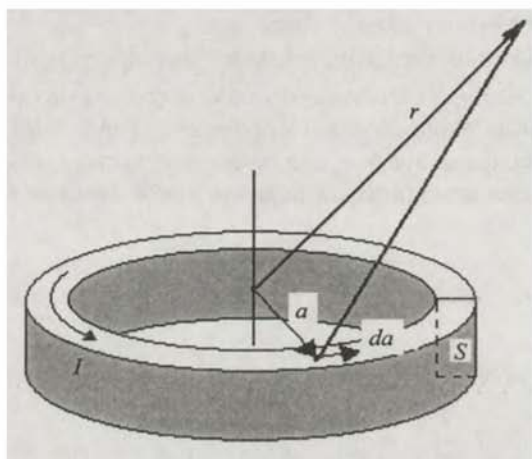


Рис. 18. Магнитный диполь – рамка с током

Воспользуемся общим решением для вектора Герца вида (2.15), в соответствие с которым запишем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}(\bar{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_a} \iiint \frac{\bar{j}(t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c})}{4\pi|\bar{r} - \bar{r}'|} (d^3\bar{r}').$$

Имея в виду малые размеры рамки и то, что

$$j(t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c}) = I(t - \frac{|\bar{r} - \bar{r}'|}{c})/s, \quad \bar{r}' = \bar{a},$$

объемный интеграл можно заменить интегралом по замкнутой окруж-



ности радиуса  $a$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_a} \oint_a \frac{I \left( t - \frac{|\vec{r} - \vec{a}|}{c} \right)}{4\pi |\vec{r} - \vec{a}|} d\vec{a} \approx \frac{I \left( t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi \epsilon_a} \oint_a \frac{d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|}.$$

Имея в виду, что  $a \ll r$ , можно записать

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \approx \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{a}\vec{r}}{r^2} \right).$$

В результате интеграл по замкнутой окружности упрощается:

$$\oint_a \frac{d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|} \approx \frac{1}{r^3} \oint_a (\vec{r}\vec{a}) d\vec{a}.$$

Простым дифференцированием можно показать, что

$$(\vec{r}\vec{a}) d\vec{a} = \frac{1}{2} d \{ (\vec{r}\vec{a}) \vec{a} \} - \frac{1}{2} [\vec{r} [\vec{a} d\vec{a}]],$$

и тогда

$$\oint_a \frac{d\vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|} \approx \frac{[\vec{S}\vec{r}]}{r^3},$$

где  $\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \oint_a [\vec{a} d\vec{a}]$  — площадь рамки с направлением по оси вращения.

В результате всех этих упрощений для вектора Герца элементарной рамки имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_a \mu_a} \left[ \vec{P}_m \frac{\vec{r}}{r^3} \right], \quad (2.29)$$

где через  $\vec{P}_m \equiv \mu_a \vec{S} I(t - r/c)$  обозначена величина, называемая магнитный момент элементарной рамки (магнитного диполя).

Вычисление напряженностей магнитного и электрического полей производится по обычным формулам (2.11) и (2.12). Например, в квазистатическом приближении ( $\vec{P}_m = \text{const}$ ) имеем

$$\vec{H} = \epsilon_a \text{rot} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma} = \frac{3(\vec{e}\vec{P}_m)\vec{e} - \vec{P}_m}{4\pi \mu_a r^3}.$$

Если сравнить это выражение с полученным ранее (2.26) для элементарного электрического диполя, то замечаем подобие (симметрию) этих формул. Отсюда следует дополнение к принципу перестановочной двойственности (1.11) в виде

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{H}, \vec{P} \equiv \vec{P}_e \Leftrightarrow -\vec{P}_m, \epsilon_a \Leftrightarrow -\mu_a. \quad (2.30)$$

Замена (2.30) позволяет рассчитать поле и в общем случае ( $\vec{P}_m \neq \text{const}$ ), в частности записать сразу выражения для поля излучения:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi c r} \left[ \vec{e} \ddot{\vec{P}}_m \left( t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{-\epsilon_a}{4\pi r} \left[ \vec{e} \left[ \ddot{\vec{P}}_m \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] = [\vec{e} \vec{E}] \frac{1}{Z_a}.$$

В справедливости этих выражений можно убедиться путем прямых вычислений поля с использованием правил (2.11) и (2.12), примененных к (2.29).

## Глава 3

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ

#### 3.1. О комплексных представлениях в электродинамике

Все приведенные выше электродинамические соотношения справедливы при относительно произвольных временных изменениях источников, в том числе негармонических. Это особенно важно сейчас, когда в радиофизике все большее применение находят т.н. сверхширокополосные системы. Такие системы используют сигналы, для которых нельзя указать преимущественную частоту  $f_0$  в спектре и ширина спектра которых  $\Delta$  сравнима с верхней частотой в спектре  $f_*$ . До недавних пор вся радиоэлектроника была исключительно узкополосной. Считалось, что всегда можно было выделить преимущественную частоту вблизи которой сосредоточен весь спектр ( $\Delta \ll f_0$ ). Это позволяло добиться ощутимых упрощений и продвижений в развитии теории, в частности путем использования комплексных представлений сигналов и полей.

К настоящему времени в электродинамике существует три несколько отличных друг от друга подхода к введению комплексных представлений: метод комплексных амплитуд, спектральный метод и метод аналитического сигнала. Остановимся кратко на них.

**1. Метод комплексных амплитуд** используется, когда хорошо известна частота всех временных изменений сигналов  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Реально измеряемый сигнал

$$x(\vec{r}, t) = A_0(\vec{r}) \cos(\psi(\vec{r}) - \omega_0 t) = C(\vec{r}) \cos \omega_0 t + S(\vec{r}) \sin \omega_0 t$$

представляют как  $x = \operatorname{Re} \{U(r, t)\}$ ,

где  $U(\vec{r}, t) = A_0(\vec{r}) \exp \{-i\omega_0 t + i\psi(\vec{r})\} = u(r) \exp \{-i\omega_0 t\}$ ,

и величина  $u(\vec{r}) \equiv A_0(\vec{r}) \exp \{+i\psi(\vec{r})\} = C(\vec{r}) + iS(\vec{r})$

называется комплексной амплитудой, модуль которой

$$|u(\vec{r})| \equiv A_0(\vec{r}) = \sqrt{C^2(\vec{r}) + S^2(\vec{r})}$$

является настоящей амплитудой колебаний, а аргумент  $\arg\{u(\vec{r})\} \equiv \psi(\vec{r})$  — его начальной фазой. Функции  $C(\vec{r})$ ,  $S(\vec{r})$  называются квадратурными составляющими.

Применение метода сводится к простой формальной замене реального сигнала на комплексный:

$$x(r, t) \rightarrow \{U(r, t) \equiv u(r) \exp(-i\omega_0 t)\}.$$

После этого выполняются все временные дифференцирования, и сам временной множитель опускается. Далее задача решается только для комплексной амплитуды  $u(r)$ . После того как эта величина полностью определена, восстанавливается временной множитель:

$$U(r, t) = u(r) \exp(-i\omega_0 t).$$

Реальный сигнал находится как

$$x(r, t) = \operatorname{Re}\{U(r, t)\}.$$

Этот метод является наиболее простым, дает много полезных результатов, но применим только для узкополосных сигналов.

**2. Спектральный метод** основан на использовании комплексного преобразования Фурье. При этом для реального сигнала записывается его спектральное представление

$$E(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\vec{r}, \omega) \exp\{-i\omega t\} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Здесь комплексный спектр  $\underline{E}(\vec{r}, \omega)$  играет ту же роль, что и комплексная амплитуда. По сути дела, именно этим методом мы уже воспользовались в разд. 2.4. Спектральный метод широко используется для широкополосных сигналов, а в частном случае узкополосных сигналов его результаты совпадают с результатами первого метода.

**3. Метод аналитического сигнала** основан на использовании преобразования Гильберта. Если у нас есть реальный сигнал  $x(\vec{r}, t)$ , то с помощью преобразования Гильберта получают сопряженный ему сигнал

$$y(\vec{r}, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\vec{r}, \tau)}{\tau - t} d\tau,$$

где интеграл имеет особенность и понимается в смысле Коши. Комплексный сигнал получается как комбинация:

$$z(\vec{r}, t) = x(\vec{r}, t) + i y(\vec{r}, t).$$

Этот сигнал и называется аналитическим сигналом. Важным свойством этого сигнала является то, что его спектр имеет вид

$$\underline{z}(\vec{r}, \omega) = \underline{x}(\vec{r}, \omega)[1 + \operatorname{sgn}(\omega)].$$

Иначе говоря, для отрицательных частот спектр аналитического сигнала равен нулю. В этом легко убедиться прямым вычислением спектра аналитического сигнала.

Если аналитический сигнал является узкополосным, то у него можно выделить осциллирующий множитель

$$z(\vec{r}, t) = \exp\{-i\omega_0 t\} u(\vec{r}, t),$$

где  $u(\vec{r}, t)$  играет роль комплексной амплитуды, модуль которой  $|u(\vec{r}, t)| = A_0(\vec{r}, t)$  соответствует обычной амплитуде колебаний, аргумент  $\arg\{u(\vec{r}, t)\} = \psi(\vec{r}, t)$  — его начальной фазе. Все подобно методу комплексной амплитуды.

Теория аналитических сигналов наиболее эффективна для сверхширокополосных сигналов, а в частном случае узкополосных сигналов её результаты совпадают с результатами двух предыдущих методов.

Все три подхода позволяют относительно просто выполнять дифференцирование по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(\vec{r}, t) &\leftrightarrow -i\omega \underline{U}(\vec{r}, \omega), & \frac{\partial}{\partial t} E(\vec{r}, t) &\leftrightarrow -i\omega \underline{E}(\vec{r}, \omega) \\ \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} z(\vec{r}, t) &\leftrightarrow -i\omega \underline{z}(\vec{r}, \omega). \end{aligned}$$

Сделаем два важных замечания:

1. Далее мы будем рассматривать чисто гармонические сигналы, и поэтому уместно использовать самый простой подход — метод комплексных амплитуд.

2. Здесь и далее в нашем курсе мы будем использовать обозначение  $i = \sqrt{-1}$  для мнимой единицы, и при этом предполагаем временную за-

висимость вида  $\exp(-i\omega t)$ . В литературе по радиоэлектронике иногда используется зависимость вида  $\exp(j\omega t)$ . При этом можно считать  $j = -\sqrt{-1} = -i$ . Хотя само по себе использование тех или иных обозначений – дело условностей, но в настоящее время такая замена является общепринятой.

### 3.2. Уравнения Максвелла в частотном представлении

Будем считать, что заряды, токи и поля изменяются от времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . Перейдем к комплексным амплитудам всех векторов и проведем замену операции дифференцирования по времени на умножение по правилу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega.$$

Вплоть до окончания этого раздела для исключения путаницы все комплексные амплитуды будем подчеркивать снизу, например  $\underline{\vec{E}}$ . Кроме того, для ясности выделим сторонние токи и заряды:

$$\underline{\vec{j}}^{(e)} = \sigma^{(e)} \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{j}}_{\text{ст}}^{(e)}, \quad \rho^{(e)} = \rho_{\text{np}}^{(e)} + \rho_{\text{ст}}^{(e)}.$$

В результате всех этих замен первое и третье дифференциальные уравнения Максвелла для комплексных векторов записываются как

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = -i\omega \epsilon_a \underline{\vec{E}} + \sigma^{(e)} \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{j}}_{\text{ст}}^{(e)},$$

$$\text{div}(\epsilon_a \underline{\vec{E}}) = \rho_{\text{np}}^{(e)} + \rho_{\text{ст}}^{(e)}.$$

Закон сохранения заряда для токов проводимости означает, что

$$\text{div}(\sigma^{(e)} \underline{\vec{E}}) - i\omega \rho_{\text{np}}^{(e)} = 0.$$

С учетом этого соотношения третье уравнение Максвелла переписывается как

$$\text{div} \left\{ \left( \epsilon_a + i \frac{\sigma^{(e)}}{\omega} \right) \underline{\vec{E}} \right\} = \rho_{\text{ст}}^{(e)},$$

или

$$\text{div} \{ \epsilon_a \underline{\vec{E}} \} = \rho_{\text{ст}}^{(e)},$$

где через

$$\underline{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + i \frac{\sigma^{(e)}}{\omega}, \quad \underline{\varepsilon} = \frac{\underline{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} = \varepsilon + i \frac{\sigma^{(e)}}{\omega \varepsilon_0} \quad (3.1)$$

обозначены т.н. комплексные абсолютная и относительная диэлектрические проницаемости среды. По аналогии с обычным вектором электрической индукции часто вводится комплексный вектор электрической индукции с помощью соотношения  $\underline{\bar{D}} \equiv \underline{\varepsilon}_a \underline{\bar{E}}$ , играющего роль обобщенного материального уравнения. Формально этот переход выглядит как замена  $\varepsilon_a \rightarrow \underline{\varepsilon}_a$  и  $\bar{D} \rightarrow \underline{\bar{D}}$ .

С учетом введенных обозначений первое и третье уравнения Максвелла переписываются как

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\bar{H}} &= -i\omega \underline{\bar{D}} + \underline{\bar{j}}_{\text{ст}}^{(e)}, \\ \text{div } \underline{\bar{D}} &= \rho_{\text{ст}}^{(e)}. \end{aligned}$$

Физический смысл введенной комплексной диэлектрической проницаемости заключается в объединении токов проводимости с токами смещения. Расплата за это – комплексность проницаемости. Часто делают и наоборот – сводят токи смещения к токам проводимости, и тогда вводится т.н. комплексная проводимость:

$$\underline{\sigma}^{(e)} \equiv \sigma^{(e)} - i\omega \varepsilon_a. \quad (3.2)$$

Принцип перестановочной двойственности обобщается естественным образом для комплексных величин:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{E}} &\Leftrightarrow \underline{\bar{H}}, \quad \varepsilon_0 \Leftrightarrow \mu_0, \\ \underline{\varepsilon} &\Leftrightarrow -\underline{\mu}, \quad \underline{\sigma}^{(e)} \Leftrightarrow -\underline{\sigma}^{(m)}, \\ \underline{\bar{j}}^{(e)} &\Leftrightarrow -\underline{\bar{j}}^{(m)}, \quad \underline{I}^{(e)} \Leftrightarrow -\underline{I}^{(m)}, \quad \underline{q}^{(e)} \Leftrightarrow -\underline{q}^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При этом по аналогии вводится комплексный вектор магнитной индукции и  $\underline{\bar{B}} \equiv \underline{\mu}_a \underline{\bar{H}}$  – комплексная магнитная проницаемость:

$$\underline{\mu}_a = \mu_a + i \frac{\sigma^{(m)}}{\omega}, \quad \underline{\mu} = \frac{\underline{\mu}_a}{\mu_0}.$$

Все это позволяет записать уравнения Максвелла в комплексном представлении:

Дифференциальная форма	Интегральная форма
$\text{rot } \underline{\vec{H}} = -i\omega \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(e)}$	$\oint_L \underline{\vec{H}} d\vec{l} = -i\omega \iint_S \underline{\vec{D}} d\vec{s} + \underline{I}_{\text{CT}}^{(e)}$
$\text{rot } \underline{\vec{E}} = +i\omega \underline{\vec{B}} - \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(m)}$	$\oint_L \underline{\vec{E}} d\vec{l} = i\omega \iint_S \underline{\vec{B}} d\vec{s} - \underline{I}_{\text{CT}}^{(m)}$
$\text{div } \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}_{\text{CT}}^{(e)}$	$\iint_S \underline{\vec{D}} d\vec{s} = \underline{q}_{\text{CT}}^{(e)}$
$\text{div } \underline{\vec{B}} = \underline{\rho}_{\text{CT}}^{(m)}$	$\iint_S \underline{\vec{B}} d\vec{s} = \underline{q}_{\text{CT}}^{(m)}$

Формально переход к комплексным представлениям выглядит как замена всех вещественных величин на их комплексные аналоги и замена всех источников только на сторонние источники (токи и заряды). Это в полной мере относится и к граничным условиям (1.13), (1.14), (1.17) и (1.18), в которых в правых частях фигурируют поверхностные плотности сторонних источников. Если на границе раздела таких источников нет, то правые части следует положить равными нулю.

Любопытна судьба волнового уравнения, которое в комплексном представлении переходит в уравнение Гельмгольца. Так, например, для комплексных электрического и магнитного полей (2.1s) и (2.2s) имеем

$$\Delta \underline{\vec{E}} + k^2 \underline{\vec{E}} = \frac{\text{grad } \underline{\rho}_{\text{CT}}^{(e)}}{\underline{\epsilon}_a} - i\omega \underline{\mu}_a \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(e)} + \text{rot } \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(m)},$$

$$\Delta \underline{\vec{H}} + k^2 \underline{\vec{H}} = \frac{\text{grad } \underline{\rho}_{\text{CT}}^{(m)}}{\underline{\mu}_a} - i\omega \underline{\epsilon}_a \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(m)} - \text{rot } \underline{\vec{j}}_{\text{CT}}^{(e)}.$$

Здесь введено комплексное волновое число, которое равно

$$\underline{k} \equiv \omega \sqrt{\underline{\epsilon}_a \underline{\mu}_a} = \omega/c \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}}.$$

В заключение этого раздела заметим, что поскольку теперь у всех векторов полей, источников и проницаемостей появились комплексности, то логично для упрощения записей везде дальше опустить введенное ранее условное обозначение комплексности, например, вместо  $\underline{\vec{E}}$



писать просто  $\vec{E}$ . Кроме того, поскольку теперь все источники сторонние, то будем опускать соответствующий значок.

### 3.3. Электродинамические потенциалы в комплексном представлении

Комплексный векторный потенциал и комплексный скалярный потенциал вводятся по тем правилам, что и раньше, но с заменой всех величин на их комплексные аналоги. При этом появляются некоторые особенности. Так, калибровка Лоренца переписывается и в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} - i\omega\epsilon_a\mu_a\varphi = 0.$$

Это означает, что отпадает необходимость введения скалярного потенциала, поскольку он выражается через векторный потенциал:

$$\varphi = \frac{1}{i\omega\epsilon_a\mu_a} \operatorname{div} \vec{A}.$$

Сам комплексный векторный потенциал выражается через комплексный вектор Герца как

$$\vec{A} = -i\omega\epsilon_a\mu_a\vec{\Gamma}.$$

Все сводится к вектору Герца.

Волновое уравнение, которому удовлетворял вектор Герца, трансформируется в уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\vec{\Gamma} + k^2\vec{\Gamma} = \frac{\vec{j}^{(e)}}{i\omega\epsilon_a}.$$

Значения векторов напряженности электрического и магнитного полей находятся через вектор Герца как

$$\vec{E} = k^2\vec{\Gamma} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Gamma},$$

$$\vec{H} = -i\omega\epsilon_a \operatorname{rot} \vec{\Gamma}.$$

### 3.4. Вектор и теорема Пойнтинга в комплексном представлении

Переход к гармоническим полям в определенной степени эквивалентен введению комплексных амплитуд. Здесь все более или менее про-

сто, поскольку это линейная операция и осциллирующие временные множители везде просто сокращаются. Для расчета энергетических характеристик нужен новый подход. Определим комплексный вектор Пойнтинга как векторное произведение:

$$\underline{\Pi} \equiv \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*].$$

Здесь знак «\*» означает комплексное сопряжение.

Вычислим расходимость для векторного произведения:

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}^*] = \vec{H}^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^*.$$

Опираясь на уравнения Максвелла в комплексной форме, можно записать

$$\operatorname{div} [\vec{E} \vec{H}^*] = i\omega \left\{ -\underline{\epsilon}_a |\vec{E}|^2 + \underline{\mu}_a |\vec{H}|^2 \right\} - \vec{j}^{(e)*} \vec{E} - \vec{j}^{(m)} \vec{H}^*,$$

отсюда

$$P_{\text{ср}} \equiv -\frac{1}{2} (\vec{j}^{(e)*} \vec{E} + \vec{j}^{(m)} \vec{H}^*) = \operatorname{div} \underline{\Pi} + 2i\omega \left\{ \frac{\underline{\epsilon}_a}{4} |\vec{E}|^2 - \frac{\underline{\mu}_a}{4} |\vec{H}|^2 \right\},$$

или в интегральном виде

$$P_{\text{ср}} \equiv \iiint_V p_{\text{ср}} dV = \oiint_S \underline{\Pi} d\vec{S} + 2i\omega \iiint_V \left\{ \frac{\underline{\epsilon}_a}{4} |\vec{E}|^2 - \frac{\underline{\mu}_a}{4} |\vec{H}|^2 \right\} dV.$$

Здесь  $S$  означает замкнутую поверхность, которая ограничивает некоторый объем  $V$ . Эти два соотношения известны как дифференциальная и интегральная теоремы Пойнтинга в комплексном представлении. С учетом представлений комплексных проницаемостей среды для вещественной и мнимой частей интегральной теоремы Пойнтинга имеем

$$\operatorname{Re} P_{\text{ср}} = \oiint_S \operatorname{Re} (\underline{\Pi}) d\vec{S} + \iiint_V \left\{ \frac{\sigma^{(e)}}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{\sigma^{(m)}}{2} |\vec{H}|^2 \right\} dV; \quad (3.4)$$

$$\operatorname{Im} P_{\text{ср}} = \oiint_S \operatorname{Im} (\underline{\Pi}) d\vec{S} + 2\omega \iiint_V \left\{ \frac{\underline{\epsilon}_a}{4} |\vec{E}|^2 - \frac{\underline{\mu}_a}{4} |\vec{H}|^2 \right\} dV. \quad (3.5)$$

Выясним физический смысл полученных теорем (3.4) и (3.5).

Начнем с комплексного вектора Пойнтинга. Для этого у комплексных векторов поля выделим амплитуды и начальные фазы:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\psi_E) \text{ и } \vec{H} = \vec{H}_0 \exp(i\psi_H).$$

С учетом этого для комплексного вектора Пойнтинга имеем

$$\underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \exp\{i\psi\}, \quad \psi \equiv \psi_E - \psi_H.$$

Это означает, что

$$\operatorname{Re} \underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \cos(\psi), \text{ а } \operatorname{Im} \underline{\vec{P}} = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \sin(\psi).$$

Вернемся ненадолго к пространственно-временному представлению полей и запишем

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \psi_E), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \psi_H),$$

так что для обычного вектора Пойнтинга в этом случае имеем

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = [\vec{E} \vec{H}] = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \{ \cos(2\omega t - \psi_E - \psi_H) + \cos(\psi_E - \psi_H) \}. \quad (3.6)$$

Если теперь усреднить этот результат по времени за период, то можно записать

$$\langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle_T = \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \cos(\psi) = \operatorname{Re} \underline{\vec{P}}.$$

Иначе говоря, мы установили, что вещественная часть комплексного вектора Пойнтинга представляет собой усредненный за период обычный вектор Пойнтинга гармонического поля.

Чтобы разобраться с мнимой частью комплексного вектора Пойнтинга, перепишем соотношение (3.6) в виде

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \cos(\psi) \{1 + \cos(2\omega t - 2\psi_H)\} + \\ &+ \frac{1}{2} [\vec{E}_0 \vec{H}_0] \sin(\psi) \sin(2\omega t - 2\psi_H), \end{aligned}$$

или иначе

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \underline{\vec{P}} \{1 + \cos(2\omega t - 2\psi_H)\} + \operatorname{Im} \underline{\vec{P}} \sin(2\omega t - 2\psi_H). \quad (3.7)$$

Получившиеся два слагаемых в (3.7) называются соответственно активной и реактивной частями вектора Пойнтинга. Активная часть не

меняет своего знака и колеблется около среднего значения – вещественной части комплексного вектора Пойнтинга. Реактивная часть колеблется около нуля. Частота колебаний вектора Пойнтинга равна удвоенной частоте гармонических колебаний. Амплитуда же колебаний реактивной части вектора Пойнтинга совпадает с мнимой частью комплексного вектора Пойнтинга.

Теперь, что касается остальных членов, входящих в теорему Пойнтинга (3.4) и (3.5). Для понимания их смысла достаточно учесть, что при усреднении за период имеют место очевидные равенства

$$\langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle_T = \frac{1}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2, \quad \langle |\vec{H}(\vec{r}, t)|^2 \rangle_T = \frac{1}{2} |\vec{H}(\vec{r})|^2.$$

Становится понятным, что члены

$$\langle P_e \rangle_T = \iiint_V \frac{\sigma^{(e)}}{2} |\vec{E}|^2 dV, \quad \langle P_m \rangle_T = \iiint_V \frac{\sigma^{(m)}}{2} |\vec{H}|^2 dV$$

описывают средние за период электрические и магнитные потери мощности в объеме  $V$ . Интеграл же вида

$$\Delta W \equiv \iiint_V \left\{ \frac{\epsilon_a}{4} |\vec{E}|^2 - \frac{\mu_a}{4} |\vec{H}|^2 \right\} dV = \langle W_e \rangle_T - \langle W_m \rangle_T$$

описывает разность электрической и магнитной энергий в среднем за период накопленных в объеме  $V$ .

В целом первая теорема Пойнтинга (3.4) говорит: «Средняя за период активная мощность стороннего гармонического источника, действующая в некотором объеме, распределяется на среднюю мощность излучения, уходящего из объема, и на среднюю мощность потерь внутри объема». По сути дела, это есть теорема об активной (невозвратной) части вектора Пойнтинга.

Вторая теорема, связанная с формулой (3.5), говорит: «Амплитуда реактивной части мощности стороннего гармонического источника, действующего в некотором объеме, определяется суммой амплитуд реактивной части (колеблющейся) мощности излучения из объема и амплитуды колебаний разности средних запасенных электрической и магнитной энергий внутри объема». Эта теорема об реактивной (осциллирующей) части вектора Пойнтинга.

Обе теоремы имеют ключевое значение при оптимизации излучающих систем.

### 3.5. Поле элементарного электрического вибратора

#### 3.5.1. Пространственно-частотное представление поля

Рассмотрим приложение полученных результатов для описания поля элементарного электрического вибратора, который представляет собой малый отрезок прямолинейного проводника с гармонически изменяющимся током (рис. 19).

Элементарность вибратора понимается в том смысле, что:

1. Размер вибратора мал по сравнению с расстоянием до точки наблюдения  $d \ll r$ .

2. Размер вибратора мал по сравнению с длиной волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$ :  $d \ll \lambda$  или  $kd \ll 1$ , где  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  – волновое число.

С учетом этих допущений можно считать, что вдоль вибратора распределение тока  $I = I(t)$  практически не меняется.

Структура поля элементарного электрического вибратора полностью подобна структуре поля диполя Герца, однако стационарность (монокроматичность) колебаний позволяет проанализировать некоторые дополнительные особенности пространственной структуры поля. Сделаем это для элементарного электрического вибратора.

Ток – это движение носителей зарядов, которому можно сопоставить колеблющийся элементарный электрический диполь Герца. Если ток течет снизу вверх, то условно можно считать нижнюю половину вибратора заряженной положительно, а верхнюю – отрицательно. Положительные заряды движутся вверх, а отрицательные – вниз. Ток равен

$$I = \frac{d}{dt} q.$$

Умножая левую и правую части этого равенства на  $\vec{d}$  – длину вибратора, получаем соотношение, подобное (2.16):

$$I\vec{d} = \frac{d}{dt}(q\vec{d}) = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

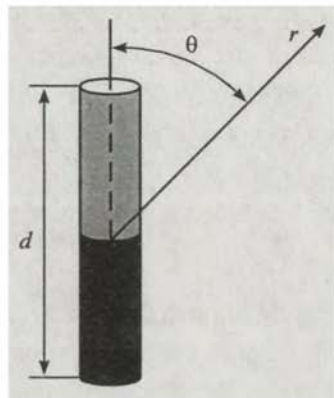


Рис. 19. Электрический вибратор

Далее с учетом гармоничности колебаний для соответствующих комплексных амплитуд можно заменить

$$I\vec{d} = -i\omega\vec{P} \quad \text{или} \quad \vec{P} = \frac{Id}{-i\omega}.$$

Этим можно воспользоваться, чтобы записать сразу решение для гармонического вибратора из готового решения для колеблющегося диполя Герца (2.21) и (2.24). Необходимо только учесть, что переходом к комплексной амплитуде запаздывающего дипольного момента будет замена

$$\vec{P}\left(t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow \vec{P} \exp(i\omega \frac{r}{c}) = \vec{P} \exp(ikr),$$

$$\ddot{\vec{P}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow \vec{P} \exp(ikr)(-i\omega)^2.$$

Для приведенного же дипольного момента  $\vec{P}_s(\vec{r}, t)$  в соответствии с (2.22) и (2.23) необходимо заменить

$$\vec{P}_s(\vec{r}, t) \equiv \vec{P}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \dot{\vec{P}}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow \vec{P} \exp(ikr) \{1 - ikr\},$$

$$\dot{\vec{P}}_s(\vec{r}, t) \equiv \dot{\vec{P}}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c} \ddot{\vec{P}}\left(\vec{r}, t - \frac{r}{c}\right) \rightarrow \vec{P} \exp(ikr) \{1 - ikr\}(-i\omega).$$

Сочетание приведенных выше замен позволяет сразу из (2.21) и (2.24) записать выражения для комплексных амплитуд напряженности магнитного и электрического поля

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{E}(r) = E_r \vec{e}_r + E_\vartheta \vec{e}_\vartheta,$$

где  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$  – единичные орты сферической системы координат в точке наблюдения, и проекции поля на них обозначены как

$$H_\varphi \equiv \frac{Id}{4\pi r^2} \exp(ikr) \{1 - ikr\} \sin \vartheta,$$

$$E_r \equiv \frac{Id}{-i\omega 4\pi \epsilon_0 r^3} \exp(ikr) \{1 - ikr\} 2 \cos \vartheta,$$

$$E_{\vartheta} \equiv \frac{Id}{-i\omega 4\pi\epsilon_a r^3} \exp(ikr) \{1 - ikr - (kr)^2\} \sin \vartheta.$$

Видно, что поле обладает осевой симметрией – не зависит от полярного угла  $\vartheta$ .

### 3.5.2. Ближняя зона

Ближняя зона – это область, для которой  $kr \leq 1$ . В этой области можно отбросить члены порядка  $(kr)^2$  и считать, что

$$\exp(ikr) \{1 - ikr\} = 1 + O^2(kr).$$

Последнее означает, что фазовое запаздывание в ближней зоне не существенно.

Выражения для компонент поля принимают вид

$$H_{\varphi} \equiv \frac{Id}{4\pi r^2} \sin \vartheta, \quad E_r \equiv \frac{Id}{-i\omega 4\pi\epsilon_a r^3} 2 \cos \vartheta, \quad E_{\vartheta} \equiv \frac{Id}{-i\omega 4\pi\epsilon_a r^3} \sin \vartheta.$$

Отсюда видно, что хотя фазовый сдвиг с удалением от источника не меняется, тем не менее между собой электрическое и магнитное поле имеют постоянный (в пределах ближней зоны) фазовый сдвиг  $\psi \equiv \psi_E - \psi_H = \pi/2$ . Электрическое поле опережает магнитное поле на четверть периода. Максимуму электрического поля соответствует минимум магнитного поля, и наоборот. На рис. 20 схематически показана пространственно-временная структура этого поля при  $\vartheta = \pi/2$ .

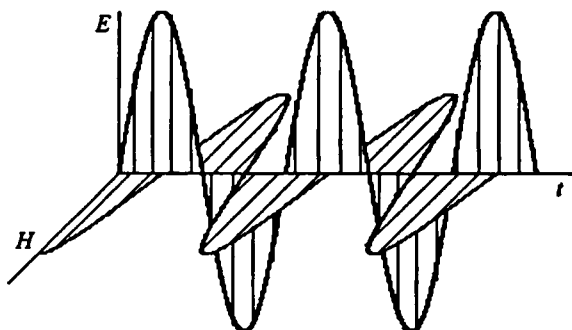


Рис. 20. Поле вибратора в ближней зоне

Средние плотности электрической и магнитной энергий вблизи вибратора распределяются в пространстве как

$$w_e = \frac{1}{4} \epsilon_a \left( \frac{|I|d}{\omega 4\pi \epsilon_a r^3} \right)^2 (3 \cos^2 \vartheta + 1), \quad w_m = \frac{1}{4} \mu_a \left( \frac{|I|d}{4\pi r^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta.$$

При этом

$$\frac{w_e}{w_m} = \frac{3 \cos^2 \vartheta + 1}{\sin^2 \vartheta} \frac{1}{(kr)^2} \geq 1,$$

т.е. в ближней зоне доминирует электрическая энергия. Пространственное распределение этих плотностей от угла  $\vartheta$  схематически показано на рис. 21. Положению вибратора соответствует штриховой прямоугольник.

Комплексный вектор Пойнтинга имеет вид

$$\vec{\Pi} = \Pi_r \vec{e}_r + \Pi_\vartheta \vec{e}_\vartheta = i \operatorname{Im} \vec{\Pi},$$

где

$$\Pi_r = \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi^* = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \frac{|I|^2 d^2}{-i\omega (4\pi)^2 \epsilon_a r^5},$$

$$\Pi_\vartheta = -\frac{1}{2} E_r H_\varphi^* = \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{|I|^2 d^2}{i\omega (4\pi)^2 \epsilon_a r^5}.$$

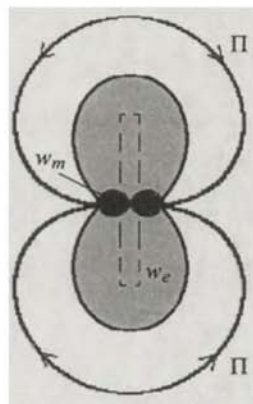


Рис. 21. Энергия поля и вектор Пойнтинга вибратора в ближней зоне

Иначе говоря, в ближней зоне поле в основном реактивное. Любопытно рассчитать траекторию движения мощности электромагнитного поля в ближней зоне. Для этого запишем уравнение силовой линии:

$$\frac{dr}{\Pi_r} = \frac{r d\vartheta}{\Pi_\vartheta}, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{\sin \vartheta} = -\frac{r d\vartheta}{2 \cos \vartheta}.$$

Его решение дает уравнение движения пульсирующей мощности

$$r = c \sqrt{\cos \vartheta}.$$

Вид этой траектории показан на рис. 21.

В динамике все выглядит так: сначала «наполняется» объем электрической энергии  $w_e$  (вблизи вибратора), затем этот объем «сдувается»



и «наполняется» объем магнитной энергии  $w_m$  (вблизи экватора). Вектор Пойнтинга играет роль «шлангов» по перекачке энергии. Далее все меняется наоборот. Конечно, аналогии здесь весьма условны.

### 3.5.3. Дальняя зона

Дальняя зона – это область излучения, для которой  $kr \gg 1$ . В этой области можно отбросить все члены более высокого порядка малости, чем  $1/r$ , и считать, что

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad \vec{E}(\vec{r}) = E_\vartheta \vec{e}_\vartheta.$$

При этом

$$H_\varphi = \frac{-ikld}{4\pi r} \exp(ikr) \sin \vartheta, \quad E_\vartheta = Z_a H_\varphi, \quad Z_a = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Видно, что электрические и магнитные составляющие меняются синфазно (рис. 22). Средние плотности электрической и магнитной энергий в точности совпадают между собой:

$$w_e = \frac{\mu_a}{4} \left| \frac{kld}{4\pi r} \sin \vartheta \right|^2 = w_m.$$

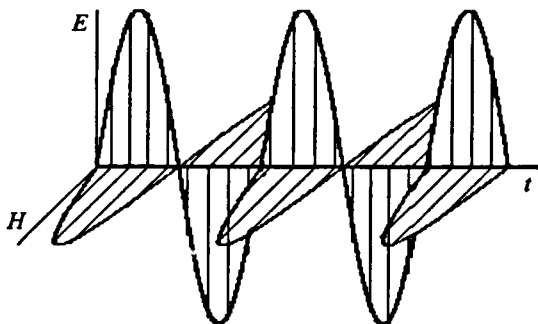


Рис. 22. Поле вибратора в дальней зоне

Вектор Пойнтинга оказывается чисто вещественным:

$$\vec{\Pi} = \Pi_r \vec{e}_r = \text{Re } \vec{\Pi},$$

где

$$\Pi_r = \frac{1}{2} Z_a |H_\varphi|^2 = \frac{1}{2} Z_a \left| \frac{kld}{4\pi r} \right|^2 \sin^2 \vartheta.$$

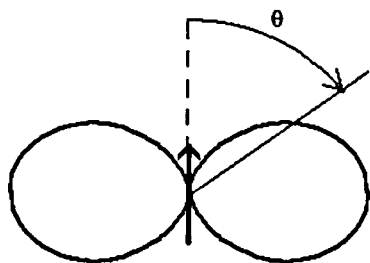


Рис. 23. Диаграмма направленности вибратора

Иными словами, в дальней зоне вектор Пойнтинга имеет только чисто активную часть, направленную строго по радиусу от источника. Величина

$$F^2(\vartheta) \equiv \frac{\Pi_r}{\max \Pi_r} = \sin^2 \vartheta,$$

называемая диаграммой направленности вибратора по мощности, показана на рис. 23. Здесь же показано общепринятое графическое обозначение

элементарного электрического вибратора в виде вертикального отрезка со стрелкой.

Можно вычислить полную среднюю мощность излучения элементарного электрического вибратора:

$$\langle P_{\text{изл}} \rangle_T = \oint \oint \operatorname{Re} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} Z_a \left| \frac{kId}{4\pi} \right|^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{|I|^2 R_{\text{изл}}}{2}.$$

Здесь величина  $R_{\text{изл}} \equiv 20(kd)^2$  называется сопротивлением излучения. Антенна выступает как некий резистор с сопротивлением  $R_{\text{изл}}$ , который трансформирует энергию в эквивалентные потери электрической цепи — энергию излучения.

### 3.6. Излучение элементарного магнитного вибратора

Подобно тому, как в п. 2.8 мы перешли от понятия элементарного электрического диполя к понятию элементарного магнитного диполя, можно для гармонических полей от элементарного электрического вибратора перейти к элементарному магнитному вибратору — рамке с переменным током (рис. 24). В соответствии с принципом перестановочной двойственности достаточно провести соответствующие замены, в частности заменить

$$\vec{p}^{(e)} = \frac{I\vec{d}}{-i\omega} \Rightarrow -\vec{p}^{(m)} = -\mu_a I\vec{S},$$

или короче

$$I\vec{d} \Rightarrow i\omega\mu_a I\vec{S}.$$

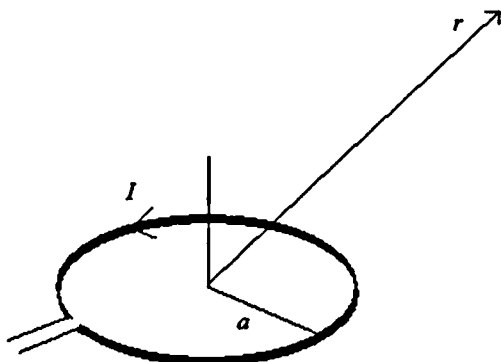


Рис. 24. Элементарный магнитный вибратор – рамка с переменным током

Силовые линии электрического и магнитного полей меняются местами. Для поля в дальней зоне ( $kr \gg 1$ ), т.е. для комплексных амплитуд поля излучения при этом имеем

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_\vartheta \vec{e}_\vartheta, \quad \vec{E}(\vec{r}) = E_\varphi \vec{e}_\varphi,$$

где 
$$H_\vartheta = \frac{-k^2 IS}{4\pi r} \exp(ikr) \sin \vartheta; \quad E_\varphi = -Z_a H_\vartheta; \quad Z_a = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Комплексный вектор Пойнтинга поля излучения оказывается чисто вещественным и направленным по радиусу от источника:

$$\vec{\Pi} = \Pi_r \vec{e}_r = \text{Re } \vec{\Pi}.$$

Здесь 
$$\Pi_r = \frac{1}{2} Z_a |H_\varphi|^2 = \frac{1}{2} Z_a \left| \frac{k I d_{\text{экв}}}{4\pi r} \right|^2 \sin^2 \vartheta$$

и введено новое обозначение

$$d_{\text{экв}} \equiv kS$$

– т.н. эквивалентная длина магнитного вибратора. Это такая длина эквивалентного (гипотетического) магнитного вибратора, при которой он бы создавал то же поле, что и рамка с током. Важно заметить, что эта величина зависит от рабочей длины волны и легко меняется при деформации сечения рамки.

Подобно тому, как это сделано в предыдущем разделе, можно ввести понятие сопротивления излучения магнитного вибратора:

$$R_{\text{изл}}^{(m)} = 20(kd_{\text{экв}})^2.$$

Это сопротивление эквивалентного резистора, который выделяет в виде мощности потерь ту же энергию, что и магнитный вибратор в виде мощности излучения.

Интересно сравнить с точки зрения эффективности излучения электрический и магнитный вибраторы при одинаковой длине используемых проводников. Если из проводника длиной  $d$ , образующего электрический вибратор, свернуть круглую рамку радиуса  $a = d/2\pi$ , то

$$d_{\text{экв}} = k\pi(d/2\pi)^2.$$

В результате получаем, что

$$\frac{R_{\text{изл}}^{(e)}}{R_{\text{изл}}^{(m)}} = \left(\frac{d}{d_{\text{экв}}}\right)^2 = \left(2\frac{\lambda}{d}\right)^2.$$

При элементарности вибраторов ( $d \leq \lambda$ ) это означает, что  $R_{\text{изл}}^{(e)} \gg R_{\text{изл}}^{(m)}$ , т.е. электрический излучатель более эффективен, чем магнитный. Однако это справедливо при малых электрических потерях в средах, окружающих излучатель.

### 3.7. Поляризация электромагнитных волн

Электромагнитное поле излучения – это свободно распространяющаяся волна. В каждой точке пространства и в каждый момент времени это поле представляет собой существенным образом векторное поле, поскольку характеризующие его векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  имеют определенную ориентацию. В свободно распространяющейся электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда перпендикулярны к направлению распространения волны, а между собой связаны через волновое сопротивление среды. Достаточным оказывается использование одного из этих векторов. В радиофизике принято описывать векторные свойства электромагнитной волны понятием её поляризации, которая определяется характером движения в пространстве и во времени конца вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Плоскостью поляризации называется плоскость, проходящая через вектор  $\vec{E}$  и направление распространения

волны. Понятие поляризации применимо для волн с произвольным фазовым фронтом, но наиболее просто его ввести на примере плоской гармонической волны.

Если плоскость поляризации не меняет своего положения во времени, то говорят, что такая волна имеет линейную поляризацию. Примерами линейно поляризованных волн являются рассмотренные выше поля излучения элементарного электрического и магнитного вибраторов. Если плоскость поляризации расположена вертикально, то говорят о вертикальной поляризации, если горизонтально, то – о горизонтальной поляризации. Понятно, что такое деление весьма условно. Две линейно поляризованные волны называются ортогональными, если ортогональны их плоскости поляризации.

Любая плоская линейно поляризованная волна может быть описана вектором:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{e}_1 E_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1),$$

где  $\vec{e}_1$  – единичный вектор поляризации волны. Направление распространения плоской волны задается волновым вектором  $\vec{k}$ , причем векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{k}$  всегда ортогональны друг другу. Плоскость поляризации – это плоскость, в которой лежат эти два вектора. Для вектора напряженности магнитного поля плоской волны имеет место представление

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{h}_1 H_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \phi_1).$$

При этом  $\vec{k} \perp \vec{h}_1 \perp \vec{e}_1 \perp \vec{k}$  и  $E_1 = H_1 Z_a$ . На рис. 22 показано, что изменения векторов поля происходят синфазно. Для векторов комплексных амплитуд эта взаимосвязь описывается как

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_a} \left[ \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} \right].$$

Строгая взаимосвязь векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  для плоской волны указывает на достаточность использования для описания поляризационных свойств лишь одного из них. В радиофизике используют вектор  $\vec{E}$ , а в оптике – вектор  $\vec{H}$ .

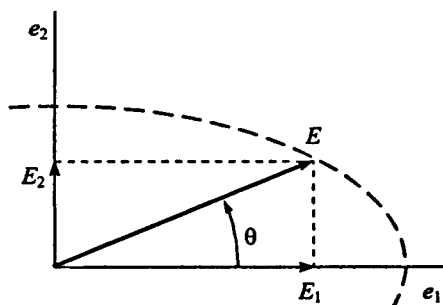


Рис. 25. Вектор поляризации

Рассмотрим общий случай, который получается, если добавить к одной плоской линейно поляризованной волне вторую волну с ортогональной поляризацией:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{e}_2 E_2 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2).$$

Суммарному полю при этом соответствует вектор

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t),$$

имеющий некоторый угол  $\theta$  по отношению к направлению  $\vec{e}_1$  (рис. 25):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_2 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_2)}{E_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)}.$$

Видно, что в общем случае угол поворота плоскости поляризации  $\theta$  меняется во времени и плоскость поляризации поворачивается (вращается). Проанализируем, каким образом происходит это вращение.

Ситуация представляется наиболее простой в случае, когда начальные фазы составляющих волн совпадают ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ) или отличаются на целое число полупериодов ( $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi n$ ). При этом угол поворота плоскости поляризации не меняется во времени и задается соотношением

$$\operatorname{tg} \theta = (-1)^n \frac{E_2}{E_1}.$$

В целом поляризация остается линейной. Суммарный вектор комплексной амплитуды поля определяется как

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = (\vec{e}_1 E_1 + (-1)^n \vec{e}_2 E_2) \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\}.$$

Другой, достаточно интересный случай реализуется, если  $E_2 = E_1$  и  $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ . При этом, очевидно,  $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)$ . Отсюда следует, что угол поворота  $\theta$  выражается, как  $\theta = \vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1 + \pi n$ . Это означает, что суммарный вектор напряженности электрического поля равномерно вращается по часовой стрелке. Суммарный вектор комплексной амплитуды поля при этом определяется как

$$\vec{E}_R(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) = (\vec{e}_1 - i\vec{e}_2) E_1 \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\}.$$

Такая волна, для которой вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке (вправо) при углублении в среду распространения, называется правополяризованной. Если при этом конец вектора  $\vec{E}$  описывает окружность, то говорят, что волна имеет круговую поляризацию. В рассмотренном случае мы имеем дело с правой круговой поляризацией.

Левая круговая поляризация получается, если  $E_2 = E_1$  и  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ . При этом, очевидно,  $\tan \theta = -\tan(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1)$ , откуда следует, что угол поворота  $\theta$  выражается как  $\theta = -\vec{k}\vec{r} + \omega t - \varphi_1 + \pi$ . Суммарный вектор напряженности электрического поля равномерно вращается против часовой стрелки — влево. Соответствующий вектор комплексной амплитуды поля с левой круговой поляризацией при этом определяется как

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)E_1 \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\}.$$

Важно подчеркнуть, что волны с круговой поляризацией получаются в результате сложения двух ортогональных линейно поляризованных волн с одинаковой амплитудой и фазовым сдвигом на четверть периода. Амплитуды получающихся волн с круговой поляризацией одинаковы  $|\vec{E}_R(\vec{r})| = |\vec{E}_L(\vec{r})|$ . Между собой эти волны также ортогональны:  $\vec{E}_R(\vec{r})\vec{E}_L(\vec{r}) = 0$ . Сложение и вычитание двух волн ортогональной круговой поляризации, но одинаковых по амплитуде приводит к двум ортогональным линейно поляризованным волнам:

$$\vec{E}_L(\vec{r}) + \vec{E}_R(\vec{r}) = 2\vec{e}_1E_1 \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\},$$

$$\vec{E}_L(\vec{r}) - \vec{E}_R(\vec{r}) = 2\vec{e}_2E_1 \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда  $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ , но  $E_2 \neq E_1$ . При этом можно записать, что

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{e}_2E_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1),$$

и тогда имеет место равенство

$$\frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2}{E_1^2} + \frac{|\vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2}{E_2^2} = 1.$$

Как известно, такое уравнение описывает эллипс. Это означает, что конец вектора напряженности электрического поля, будучи спроектированный на плоскость, ортогональную направлению распространения волны, описывает эллипс. Соответствующая поляризация называется правой эллиптической поляризацией. Левая эллиптическая поляризация получается, если изменить на противоположный фазовый сдвиг составляющих линейно поляризованных волн:  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ . Векторы комплексных амплитуд ортогональных правой и левой эллиптически поляризованных волн записываются соответственно как

$$\vec{E}_R(\vec{r}) = (\bar{e}_1 E_1 - i \bar{e}_2 E_2) \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\},$$

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = (\bar{e}_1 E_1 + i \bar{e}_2 E_2) \exp\{i(\vec{k}\vec{r} + \varphi_1)\}.$$

В самом общем случае, когда фазы и амплитуды составляющих линейно поляризованных волн произвольные, можно записать

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \bar{e}_1 E_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1),$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \bar{e}_2 E_2 [\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \cos \varphi + \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \varphi_1) \sin \varphi],$$

где  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ . Исключая отсюда временную зависимость, получаем уравнение

$$\frac{|\vec{E}_2(\vec{r}, t)|}{E_2} = \frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|}{E_1} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2}{E_1^2}} \sin \varphi,$$

или 
$$\frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|^2}{E_1^2} + \frac{|\vec{E}_2(\vec{r}, t)|^2}{E_2^2} - 2 \frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|}{E_1} \frac{|\vec{E}_2(\vec{r}, t)|}{E_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.$$

Это уравнение эллипса, большая ось которого наклонена на угол  $\psi$ , определяемый из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2 \frac{|\vec{E}_1(\vec{r}, t)|}{E_1} \frac{|\vec{E}_2(\vec{r}, t)|}{E_2} \cos \varphi.$$

Итак, мы приходим к эллипсу. Это означает, что самой общей является эллиптическая поляризация. Линейная поляризация является частным случаем и соответствует вырождению эллипса в отрезок прямой при равенстве фаз  $\varphi_1 = \varphi_2$ .



### 3.8. Лемма Лоренца и теорема взаимности

Лемма Лоренца отражает в себе единство электромагнитных полей различной природы и представляет собой прямое следствие уравнений Максвелла. Для формулировки этой леммы представим себе, что имеется две группы независимых сторонних источников  $(\vec{j}_1^{(e)}, \vec{j}_1^{(m)})$  и  $(\vec{j}_2^{(e)}, \vec{j}_2^{(m)})$ , каждая из которых создает свои поля  $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$  и  $(\vec{E}_2, \vec{H}_2)$ . Источники сосредоточены в объемах  $V_1, V_2$  (рис. 26). В силу линейности уравнений Максвелла эти поля действуют независимо, а полное поле равно их сумме. Запишем 1-е уравнение Максвелла для 1-й группы источников и 2-е уравнение для 2-й группы:

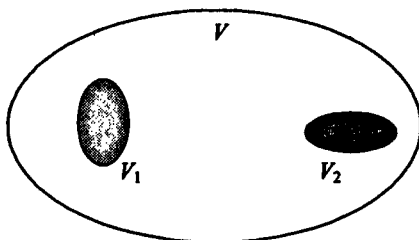


Рис. 26. К формулировке леммы Лоренца

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = -i\omega\epsilon_a \vec{E}_1 + \vec{j}_1^{(e)}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_2 = i\omega\mu_a \vec{H}_2 - \vec{j}_2^{(m)}.$$

Помножим скалярно первое из них на  $\vec{E}_2$ , а второе на  $\vec{H}_1$  и вычтем почленно. Учитывая при этом, что

$$\operatorname{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] = \vec{H}_1 \operatorname{rot} \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \operatorname{rot} \vec{H}_1,$$

в результате получим

$$\operatorname{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] = i\omega\mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2 + i\omega\epsilon_a \vec{E}_1 \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \vec{j}_1^{(e)} - \vec{H}_1 \vec{j}_2^{(m)}.$$

Совершая те же самые действия с другими уравнениями Максвелла (для нас это эквивалентно замене  $1 \leftrightarrow 2$ ), запишем

$$\operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{H}_2] = i\omega\mu_a \vec{H}_1 \vec{H}_2 + i\omega\epsilon_a \vec{E}_1 \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \vec{j}_2^{(e)} - \vec{H}_2 \vec{j}_1^{(m)}.$$

Почленное вычитание двух последних уравнений приводит к формулировке леммы Лоренца в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}[\vec{E}_2 \vec{H}_1] - \operatorname{div}[\vec{E}_1 \vec{H}_2] = +\vec{H}_2 \vec{j}_1^{(m)} - \vec{E}_2 \vec{j}_1^{(e)} + \vec{E}_1 \vec{j}_2^{(e)} - \vec{H}_1 \vec{j}_2^{(m)}.$$

Следует обратить внимание, что в левой части этого соотношения стоят только поля в точке наблюдения, а в правой части — поля и сто-

ронные источники, которые отличны от нуля только в местах их сосредоточения. Электрофизические параметры среды не входят в это соотношение. Важно подчеркнуть, что это так, если в каждой своей точке среда не обладает анизотропией, т.е.  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  – скаляры. Лемма Лоренца устанавливает взаимосвязь компонент поля от разных источников, если они находятся в одной и той же среде.

Интегральная формулировка леммы Лоренца получается из дифференциальной с использованием интегральной теоремы о дивергенции (теоремы Остроградского – Гаусса):

$$\begin{aligned} & \oint_S \{ [\vec{E}_2 \vec{H}_1] - [\vec{E}_1 \vec{H}_2] \} d\vec{s} = \\ & = \iiint_{V_1} \{ \vec{H}_2 \vec{j}_1^{(m)} - \vec{E}_2 \vec{j}_1^{(e)} \} dV + \iiint_{V_2} \{ \vec{E}_1 \vec{j}_2^{(e)} - \vec{H}_1 \vec{j}_2^{(m)} \} dV. \end{aligned}$$

Важно отметить, что каждый из объемных интегралов правой части связан с областью локализации соответствующего источника, а интегрирование в левой части производится по поверхности охватывающей обе группы источников. Последняя поверхность относительно произвольная. Если её раздвинуть на бесконечность, то при выполнении граничных условий на бесконечности поверхностный интеграл устремляется к нулю и записанное соотношение упрощается:

$$\iiint_{V_1} \{ \vec{E}_2 \vec{j}_1^{(e)} - \vec{H}_2 \vec{j}_1^{(m)} \} dV = \iiint_{V_2} \{ \vec{E}_1 \vec{j}_2^{(e)} - \vec{H}_1 \vec{j}_2^{(m)} \} dV.$$

В таком виде лемма Лоренца известна как теорема взаимности.

Для иллюстрации возможности практического применения теоремы взаимности рассмотрим случай, когда оба источника представляют собой разнесенные в пространстве элементарные электрические вибраторы, имеющие длины  $\vec{d}_1, \vec{d}_1$ . При этом имеем

$$\iiint_{V_1} \vec{E}_2 \vec{j}_1^{(e)} dV = \iiint_{V_2} \vec{E}_1 \vec{j}_2^{(e)} dV.$$

В силу элементарности источников интегралы элементарно вычисляются как

$$\vec{E}_2 \vec{d}_1 I_1 = \vec{E}_1 \vec{d}_2 I_2,$$

где  $I_1 = j_1^{(e)} S_1$ ,  $I_2 = j_2^{(e)} S_2$  – токи в первом и втором вибраторах. Теорема взаимности в этом приближении принимает вид

$$\frac{U_{12}}{I_1} = \frac{U_{21}}{I_2}.$$

Величины  $U_{21} = \vec{E}_2 \vec{d}_1$  и  $U_{12} = \vec{E}_1 \vec{d}_2$  представляют собой ЭДС, наводимые соответственно вторым источником в первом вибраторе и первым источником во втором вибраторе. Иначе: «Отношение ЭДС, создаваемой первым источником во втором, к возбуждающему току первого источника равно отношению ЭДС, создаваемой вторым источником в первом, к возбуждающему току второго источника». Часто это формулируется как «Взаимное сопротивление разных источников не изменяется при их перестановке», или упрощенно – «Передатчик и приемник можно менять местами».

Заканчивая, сделаем два замечания:

1. Теорема взаимности позволяет количественно установить или проверить условие эквивалентности различных источников, в том числе электрических и магнитных.
2. Теорема взаимности нарушается для анизотропных сред распространения волн, например, для плазмы или ферритов.

### 3.9. Эквивалентные источники и принцип Гюйгенса – Френеля

В этом разделе мы дадим обобщенную математическую формулировку известному принципу Гюйгенса – Френеля применительно к электромагнитному полю, согласно которому «Каждая точка волнового фронта волны может рассматриваться как вторичный источник, суперпозиция полей которых полностью восстанавливает распространяющуюся волну».

Начнем с того, что для начала запишем выражение для напряженности электрического поля  $\vec{E}(\vec{r})$ , создаваемого в точке  $\vec{r}$  сторонними зарядами  $\rho^{(e)}(\vec{r}')$  и токами  $\vec{j}^{(e)}(\vec{r}')$ ,  $\vec{j}^{(m)}(\vec{r}')$ , сосредоточенными в некотором объеме  $V_1$  ( $\vec{r}' \in V_1$ ). Если эти источники независимы и находятся в безграничном пространстве, то согласно решению в запаздывающих потенциалах (2.14) для комплексной амплитуды напряженности электрического поля можно записать

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{V_1} \left\{ i\omega\mu_a \vec{j}^{(e)} G - [\vec{j}^{(m)}, \text{grad } G] + \frac{1}{\epsilon_a} \rho^{(e)} \text{grad } G \right\} (d^3\vec{r}'), \quad (3.8)$$

где  $G = \frac{\exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$  – функция Грина скалярного точечного источника.

В случае, если в области распространения волны имеется некоторая дополнительная поверхность  $S$  (рис. 27), то к полю (3.8) добавляется вторичное поле, обусловленное отражением (рассеянием) первичной волны этой поверхностью. Для того чтобы описать возникающее вторичное поле, обратимся к обобщенным граничным условиям вида (1.13), (1.14), (1.17) и (1.18), в правых частях которых фигурируют поверхностные плотности сторонних источников:

$$[\vec{n}, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{j}_s^{(e)}, \quad [\vec{n}, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = -\vec{j}_s^{(m)},$$

$$\vec{n}, (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s^{(e)}, \quad \vec{n}, (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \rho_s^{(m)}.$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности, направленная в область 1. Эти условия являются достаточно общими в том смысле, что в качестве поверхности  $S$ , на которой они формулируются, может выступать как реальная граница раздела сред, так и мысленно проведенная поверхность.

Имея в виду сказанное, выделим некоторую часть пространства (обозначим её как  $V_1$  на рис. 27), в которой нас будут интересовать значения электромагнитного поля. Согласно теореме единственности решения уравнений Максвелла, для однозначности определения поля внутри области  $V_1$  достаточно задать граничные значения поля на ограничивающей её поверхности  $S$ . При этом совершенно неважно какие значения поле принимает во втором полупространстве  $V_2$ . Можно положить значение поля во втором полупространстве равным нулю:  $\vec{H}_2 = \vec{E}_2 = 0$ . Это означает, что, согласно сформулированным граничным условиям

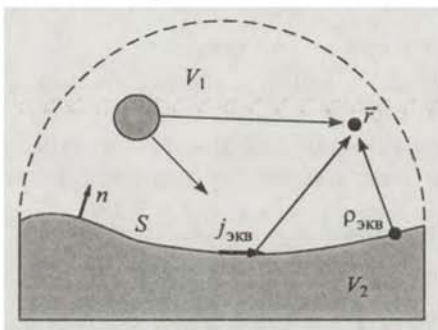


Рис. 27. К определению эквивалентных источников поля

на поверхности  $S$  для неизменности поля  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  должны существовать эффективные поверхностные токи и заряды вида

$$[\vec{n}\vec{H}_1] = \vec{j}_{\text{экв}}^{(e)}, \quad [\vec{n}\vec{E}_1] = -\vec{j}_{\text{экв}}^{(m)}, \quad \vec{n}\vec{D}_1 = \rho_{\text{экв}}^{(e)}, \quad \vec{n}\vec{B}_1 = \rho_{\text{экв}}^{(m)}. \quad (3.9)$$

Эти источники называются эквивалентными. Можно рассматривать их как некие вторичные источники, обеспечивающие неизменность поля в выделенном полупространстве  $V_1$ .

Эквивалентные источники  $\delta$ -локализованы вблизи поверхности  $S$  так, что интеграл вида (3.8) для вторичного поля преобразуется в поверхностный. В этом случае для полного поля с учетом вклада эквивалентных источников можно записать

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = & \iiint_{V_1} \left\{ i\omega\mu_a \vec{j}^{(e)} G - [\vec{j}^{(m)}, \text{grad } G] + \frac{1}{\varepsilon_a} \rho^{(e)} \text{grad } G \right\} (d^3\vec{r}') + \\ & + \iint_S \left\{ i\omega\mu_a [\vec{n}, \vec{H}] G + [\vec{n}, \vec{E}], \text{grad } G \right\} + (\vec{n}, \vec{E}) \text{grad } G \} dS. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Записанная формула известна как формула Стрэттона – Чу и является математической формулировкой принципа Гюйгенса – Френеля для электромагнитного поля. Первое слагаемое в (3.10) в виде интеграла по объему описывает первичную волну, а второе слагаемое в виде интеграла по поверхности описывает вторичную волну. Выражение для напряженности магнитного поля получается из (3.10) путем использования принципа перестановочной двойственности (3.3).

Формула Стрэттона – Чу (3.10) записана нами для случая отражения волны от границы раздела сред и представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, где неизвестная функция  $\vec{E}(\vec{r})$  входит ещё и под интеграл. Заметим, что для нахождения поверхностного значения поля обычно используются различные приближенные методы, в частности, часто используется приближение Кирхгофа. Суть приближения Кирхгофа состоит в представлении полного поля в каждой точке на поверхности в виде суммы падающей и отраженной волн. Отраженная волна находится с использованием френелевских коэффициентов отражения. Приближение Кирхгофа часто называется также приближением касательной плоскости.

Сделаем два замечания:

1. Формула (3.9) применима для описания прошедшей (преломленной) волны, но только при этом интеграл по объему отсутствует, поскольку первичные источники находятся в другом полупространстве.

2. Если поверхность интегрирования не является реальной границей раздела сред, а проведена мысленно, то в случае отражения поверхностный интеграл равен нулю, в случае преломления в точности равен полю прямой волны.

### 3.10. Излучение элемента Гюйгенса

Рассмотрим свободно распространяющуюся в свободном пространстве снизу вверх плоскую волну (рис. 28), компоненты которой  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскости  $xOy$ . Выделим малый прямоугольный элемент фронта волны с размерами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Будем называть эту площадку – элемент Гюйгенса. Заменяя элемент Гюйгенса эквивалентными электрическим и магнитным источниками, рассмотрим суммарное поле их излучения. Согласно принципу Гюйгенса – Кирхгофа, все множество таких элементов должно дать восстановление фронта исходной плоской волны, поскольку вводимая нами граница верхнего и нижнего полупространств является лишь воображаемой. Проанализируем, как это происходит.

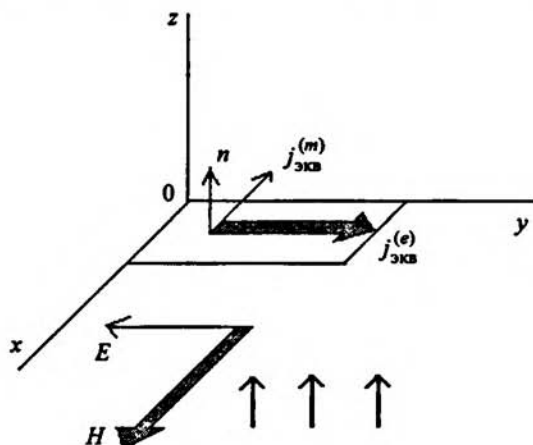


Рис. 28. Элемент Гюйгенса – суперпозиция эквивалентных источников поля

Согласно (3.9), существует только два отличных от нуля эквивалентных источника

$$[\vec{n}\vec{H}] = \vec{j}_{\text{экв}}^{(e)}, \quad [\vec{n}\vec{E}] = -\vec{j}_{\text{экв}}^{(m)},$$

которые направлены взаимно ортогонально друг другу (рис. 28). Совокупности элементарных поверхностных токов, покрывающих площадку  $(\Delta x, \Delta y)$ , образуют два скрещенных элементарных вибратора электрического и магнитного типа. Элементарный электрический вибратор имеет

длину  $\Delta y$ , и по нему течет электрический ток  $I^{(e)} = H\Delta x$  вдоль оси  $Oy$  (рис. 29). Элементарный магнитный вибратор имеет длину  $\Delta x$ , и по нему течет эквивалентный магнитный ток  $I^{(m)} = -E\Delta y$  в обратном направлении оси  $Ox$ .

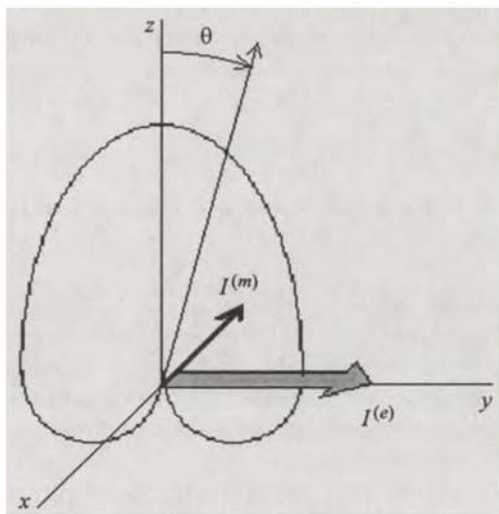


Рис. 29. Кардиоида – диаграмма направленности элемента Гюйгенса

Используя результаты расчета поля излучения элементарных электрического (пп. 3.5.3) и магнитного вибраторов (п. 3.6), запишем выражения для напряженности электрического поля  $E_\theta$ . Для простоты будем считать, что точка наблюдения лежит в плоскости  $yOz$ .

В сферической системе координат, ось которой совпадает с нормалью к элементу Гюйгенса, можно записать, что вклад, вносимый эквивалентным электрическим вибратором, равен

$$E_\theta^{(e)} = -ikGZ_a I^{(e)} \Delta y \cos \theta ,$$

где

$$G = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}$$

– функция Грина скалярного точечного источника. Для эквивалентного магнитного вибратора аналогичное выражение записывается как

$$E_\theta^{(m)} = ikGI^{(m)} \Delta x .$$

Полное поле равно сумме полей двух этих эквивалентных источников:

$$E_{\theta} = E_{\theta}^{(e)} + E_{\theta}^{(m)} = -ikG\Delta x\Delta y \{ Z_a H \cos \theta + E \} .$$

А теперь учтем, что электрические и магнитные поля здесь не произвольные, а составляющие плоской волны, для которой  $E = Z_a H$ . В результате имеем

$$E_{\theta} = -ikG\Delta x\Delta y E \{ 1 + \cos \theta \} .$$

Это означает, что диаграмма направленности излучения элемента Гюйгенса

$$F(\theta) = 1/2(1 + \cos \theta)$$

описывается кардиоидой (рис. 29), имеющей максимум в направлении распространения приходящей плоской волны и минимум (ноль) в противоположном направлении. Заметим, что в общем случае (не только в плоскости  $yOz$ ) эта диаграмма представляет собой фигуру вращения с образующей в виде кардиоиды.

В свете полученного результата становится понятным, почему эквивалентные точечные источники плоского фазового фронта не дают волны, распространяющейся в обратном направлении, — диаграмма направленности элемента Гюйгенса в этом направлении просто равна нулю.

Следует заметить, что для бесконечного фронта плоской волны сумма всевозможных элементов Гюйгенса, его составляющих, дает игольчатую диаграмму направленности с единственным максимумом в направлении распространения исходной волны и с нулем во всех остальных направлениях. Для конечного фронта, например возникающего при дифракции на отверстии, диаграмма направленности может иметь самую разнообразную форму. Возникающее поле излучения вторичных (эквивалентных) источников описывает поле дифракции. Иначе говоря, дифракционное поле представляет собой результат интерференции вторичных полей. На этом представлении основана т.н. физическая теория дифракции.



## Глава 4

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Электромагнитное поле – это особый вид материи, реальность существования которого мы обнаруживаем благодаря его взаимодействию с материальными объектами – зарядами и токами. В частности, на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , электромагнитное поле действует с силой, равной (см. (1.10))

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]). \quad (4.1)$$

Действие этой силы сказывается на характере движения частицы и, таким образом, наличие электромагнитного поля всегда можно обнаружить. Рассмотрим сначала движение заряда в постоянных полях, а затем и в переменных.

#### 4.1. Движение заряда в постоянном однородном магнитном поле

Начнем рассмотрение с самого простого случая – постоянного магнитного поля, вектор напряженности которого  $\vec{H}$  направлен строго перпендикулярно к плоскости рисунка. На рис. 30 отмечены концы векторов магнитного поля, выходящие из плоскости. Пусть в некоторый момент времени в это поле попала частица, имеющая определенную массу  $m$ , заряд  $q$  и скорость  $\vec{V}$ . Поскольку электрическое поле отсутствует, то на заряд действует только магнитное поле.

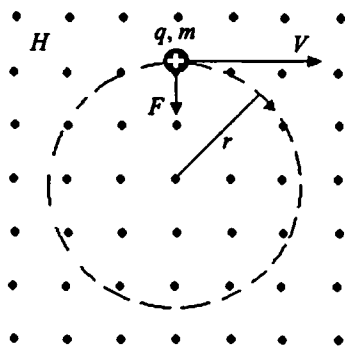


Рис. 30. Движение заряда  
в магнитном поле

Сила, связанная с этим действием, описывается вторым слагаемым в (4.1). Уравнение движения (второй закон Ньютона) записывается как

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = F = q[\vec{V}\vec{B}].$$

Умножим обе части этого уравнения на  $\vec{V}$  скалярно. Возникающее в правой части смешанное произведение векторов равно нулю, в результате уравнение движения переписывается как

$$m\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{V}^2}{2} \right) = 0.$$

Это означает, что при возникающем движении кинетическая энергия частицы остается постоянной:

$$U_{\text{кин}} = \frac{mV^2}{2} = \text{const}.$$

При этом сила  $\vec{F}$ , действующая на частицу, не равна нулю и строго перпендикулярна вектору скорости. Это возможно только при равномерном движении по окружности.

Найдем радиус  $r$  окружности, по которой движется заряд. Для этого учтем, что при равномерном движении по окружности сила Лоренца должна совпадать с центростремительной силой:  $mV^2/r = qVB$ . Определяемый отсюда радиус  $r = mV/qB$  называется циклотронным радиусом. Соответствующая угловая частота вращения заряда  $\omega = V/r = qB/m$  называется циклотронной частотой.

Сделаем три важных замечания:

1. Если в начальный момент времени у заряда помимо рассмотренной поперечной скорости имеется и продольная к полю компонента  $\vec{V}_{\parallel}$ , то на неё магнитное поле не влияет. При этом движение происходит по спирали, образующей которой является окружность циклотронного радиуса.

2. Если заряд отрицательный, как это имеет место для электрона, то вращательное движение происходит в противоположном направлении к отмеченному на рис. 30.

3. Движение по окружности не может быть бесконечным, поскольку кинетическая энергия движения постепенно растрачивается, например, на трение частицы в среде или просто на излучение. Это проявляется в том, что чисто вращательное движение переходит в скручивающуюся спираль (см. рис. 1).

## 4.2. Движение заряженной частицы в постоянном электрическом поле

Теперь рассмотрим случай постоянного электрического поля (рис. 31)

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \text{const}.$$

Уравнение движения заряда, оказавшегося в этом поле, имеет вид

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} = -q \text{grad} \varphi.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения скалярно на  $\vec{V}$ :

$$m\vec{V} \frac{d\vec{V}}{dt} = -q\vec{V} \text{grad} \varphi = -q \nabla \varphi \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

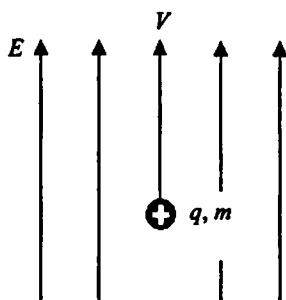


Рис. 31. Движение заряда в электрическом поле

Если перейти в систему координат, движущуюся с частицей, то можно записать

$$\nabla \varphi \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \varphi(\vec{r}(t)),$$

и тогда имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} \right) + q \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mV^2}{2} + q\varphi \right) = 0.$$

Отсюда следует, что движение заряженной частицы в постоянном электрическом поле происходит так, чтобы сумма кинетической и потенциальной энергий частицы осталась постоянной:

$$\frac{mV^2}{2} + q\varphi = U_{\text{кин}} + U_{\text{пот}} = \text{const}.$$

Например, если частица – это электрон ( $q = -e$ ), то под действием разности потенциалов ( $\varphi = U$ ) электрон разгоняется до скорости

$$V = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 600\sqrt{U} \left[ \frac{\text{км}}{\text{с}} \right].$$

Если электрон разогнан разностью потенциалов в 1 В, то он приобрел энергию, равную

$$eU = 1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Так вводится новая единица измерения энергии.

#### 4.3. Движение частицы в однородных постоянных скрещенных полях

Рассмотрим случай, когда одновременно действуют электрическое и магнитное поля. Движение заряда наиболее интересно при ортогональной ориентации этих полей  $\vec{E} \perp \vec{H}$  (рис. 32). Если в начальный момент времени частица покоится, то на неё действует только электрическое поле, которое начинает её разгонять. Как только у частицы появляется

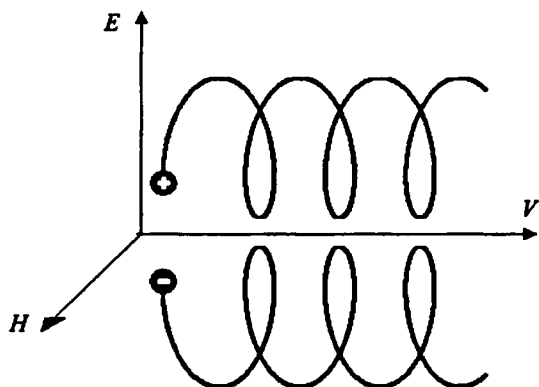


Рис. 32. Движение заряда в скрещенных полях

скорость, отличная от нуля, так начинает добавляться действие магнитного поля. Под действием магнитного поля частица начинает сворачивать на круговую траекторию движения, радиус которой меняется с из-

менением скорости. Замедление частицы влечет увеличение радиуса закругления траектории движения (рис. 32)

$$r = \frac{mV}{qB}.$$

В результате повторения процессов ускорения и замедления центр закругления траектории смещается, и в целом частица начинает дрейфовать вправо.

Для простоты математического анализа сразу представим, что вектор скорости частицы состоит из двух слагаемых:

$$\vec{V} \equiv \vec{V}_D + \vec{V}', \quad \vec{V}_D \equiv \frac{[\vec{E}\vec{B}]}{B^2}. \quad (4.2)$$

Скорость  $\vec{V}_D = \text{const}$  называется скоростью дрейфа. Подставим записанную так скорость в уравнение движения:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]).$$

Учитывая векторное равенство

$$\frac{[(\vec{E}\vec{B})\vec{B}]}{B^2} = \frac{\vec{B}(\vec{E}\vec{B}) - \vec{E}(\vec{B}\vec{B})}{B^2} = -\vec{E},$$

можно записать, что

$$m \frac{d\vec{V}'}{dt} = q[\vec{V}', \vec{B}].$$

Как мы уже убедились в п. 4.1, это уравнение описывает чисто вращательное движение в магнитном поле. На величину  $\vec{V}'$  электрическое поле не оказывает никакого влияния.

Суперпозиция вращательного и поступательного движения дает движение частицы по циклоиде (рис. 32). Подчеркнем, что циклоида целиком лежит в одной плоскости. Для отрицательно заряженной частицы меняется лишь направление вращения, но не направление дрейфа.

Забегая вперед, заметим, что замена (4.2) равнозначна переходу в такую инерциальную систему отсчета, в которой электрического поля просто нет. А раз в ней нет электрического поля, то оставшееся магнитное поле (постоянное) вызывает движение только по окружности.

#### 4.4. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

Дрейф заряженной частицы может происходить не только в скрещенных электрическом и магнитном полях, но и в неоднородных полях. Рассмотрим случай постоянного, но неоднородного магнитного поля, силовые линии которого выходят из плоскости рисунка. Это т.н. поперечная неоднородность магнитного поля. На рис. 33 точками показаны концы силовых линий магнитного поля. Плотность силовых линий возрастает вверх пропорционально величине напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ .

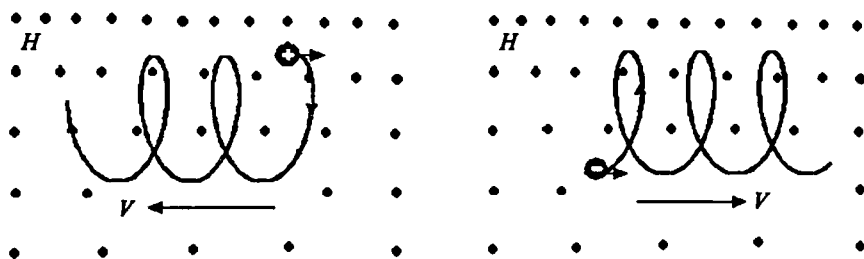


Рис. 33. Дрейф положительно и отрицательно заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

Если положительно заряженная частица, имеющая некоторую начальную скорость, попадает в магнитное поле, то она начинает движение по соответствующей её заряду  $q$ , весу  $m$  и скорости  $V$  траектории с радиусом кривизны

$$r = \frac{mV}{qB}.$$

По мере движения частица переходит в ту часть пространства, где напряженность магнитного поля уменьшается. Как следствие, радиус кривизны траектории увеличивается. Продолжая свое движение по квазикруговой траектории, со временем частица начинает входить в область пространства с большей напряженностью магнитного поля. Радиус кривизны траектории снова уменьшается (рис. 33). Далее движение периодически продолжается. Так возникает дрейф справа налево.

Для отрицательно заряженной частицы вращательное движение идет в противоположном направлении и меняется направление дрейфа (рис. 33).

Следует заметить, что в отличие от случая скрещенных полей здесь направление дрейфа зависит от знака заряда. Количественное описание этого дрейфа требует численного решения дифференциальных уравнений движения.

#### 4.5. Пространственно-временная адиабатическая инвариантность магнитного момента движения частицы

Сначала введем понятие магнитного момента движения заряда в магнитном поле. Для этого напомним, что в идеально однородном магнитном поле движение заряда происходит по спирали (рис. 34), радиус образующей которой равен циклотронному радиусу

$$r = \frac{mV_{\perp}}{qB}.$$

Здесь под скоростью понимается её проекция на плоскость, перпендикулярную к направлению магнитного поля. Продольная к магнитному полю составляющая скорости  $V_{\parallel}$  не меняется и определяет постоянную составляющую скорости движения заряда по спирали.

Чисто вращательному движению заряда по окружности может быть сопоставлен некоторый эффективный ток  $I$ , величина которого оценивается как

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T},$$

где  $T$  – период вращения. Виток тока – это магнитный диполь, имеющий магнитный дипольный момент

$$p_m = IS\mu_0,$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь витка. В результате движение заряда по спирали

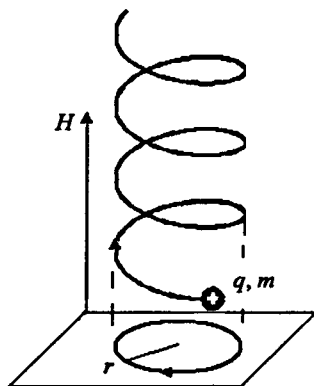


Рис. 34. Спиральное движение заряда в постоянном магнитном поле

может быть сопоставлено с эффективным дипольным моментом

$$p_m = \frac{mV_{\perp}^2}{2} \frac{\mu_0}{B}.$$

Поскольку входящая сюда комбинация

$$U_{\text{кин}} = \frac{mV_{\perp}^2}{2}$$

представляет собой кинетическую энергию вращательного движения, то эффективный дипольный момент выражается как

$$p_m = \mu_0 \frac{U_{\text{кин}}}{B} = \frac{U_{\text{кин}}}{H}. \quad (4.3)$$

В постоянном магнитном поле эта величина постоянная.

Попытаемся теперь оценить, как будет меняться эффективный дипольный момент частицы-заряда, если с течением времени начнет медленно изменяться магнитное поле.

Сразу заметим, что изменение магнитного поля во времени вызовет появление электрического поля. Величина этого поля может быть оценена из второго уравнения Максвелла

$$\oint_l d\vec{l} \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} d\vec{S}.$$

Если здесь за площадь витка взять круг циклотронного радиуса, то можно записать, что в витке наводится электрическое поле

$$E = \frac{1}{2} r \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

которое направлено на ускорение заряда при нарастании магнитного поля.

Ускорение заряда приведет к увеличению его скорости, а значит, и кинетической энергии. Из закона сохранения энергии величина возрастания кинетической энергии равна работе электрического поля по ускорению заряда. За один виток эта работа равна

$$\Delta A = q E 2\pi r = \frac{1}{2} r^2 q 2\pi \frac{dB}{dt}.$$

Тогда в единицу времени прирост кинетической энергии (мощность



ускорения) будет равен

$$\frac{dU_{\text{кин}}}{dt} \approx \frac{\Delta U_{\text{кин}}}{T} = \frac{mV^2}{2} \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \frac{U_{\text{кин}}}{H} \frac{dH}{dt}.$$

Отсюда мы получаем, что при возрастании магнитного поля

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{1}{H} \left( \frac{dU_{\text{кин}}}{dt} - \frac{U_{\text{кин}}}{H} \frac{dH}{dt} \right) = 0.$$

Иначе говоря, движение происходит так, что эффективный дипольный момент частицы-заряда остается постоянным:

$$p_m = \text{const}.$$

Любопытно, что при этом магнитный поток, пронизывающий виток траектории заряда, также остается постоянным:

$$\Phi = B\pi r^2 = p_m \frac{2\pi m}{\mu_0 q^2} = \text{const}.$$

Можно образно сказать, что заряд, однажды выбрав свою траекторию, дальше «следит» за сохранением магнитного потока, который он охватил.

Рассмотрим теперь, как изменится движение частицы, если магнитное поле во времени постоянно, но меняется в пространстве, в частности в продольном направлении:

$$B = B(z) \quad \text{и} \quad \frac{dB}{dz} > 0.$$

Измерение поля с продольной координатой  $z$  означает, что силовая линия магнитного поля имеет некоторую составляющую в направлении по радиусу окружности циклотронного радиуса  $B_r$ . В результате в выражении для силы Лоренца появится составляющая  $\vec{F}_L = q[\vec{V}_\perp \vec{B}_r]$ , направление которой противоположно направлению возрастания магнитного поля. Это означает, что при движении заряда по спирали вверх (рис. 35) его поступательное движение начнет замедляться. При продолжении этого процесса частица, в конце концов, начнет движение по спирали же, но в обратном направлении по оси  $z$ . На этом принципе работает т.н. «магнитная бутылка», применяющаяся для удержания плазмы в термоядерных реакторах.

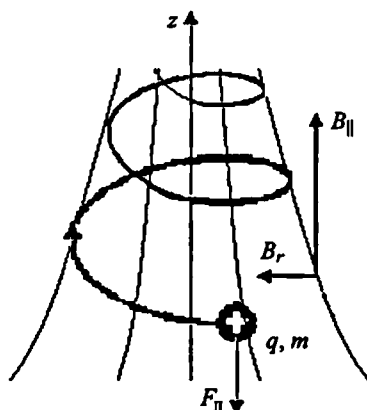


Рис. 35. Замедление движения заряда в области возрастания магнитного поля

Любопытно, что охватываемый траекторией заряда поток магнитного поля сохраняется и этом случае. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти в систему координат, движущуюся по оси  $z$  с продольной скоростью частицы. В этой системе координат магнитное поле меняется во времени:

$$\frac{d}{dt} B(z = tV_{\parallel}) = V_{\parallel} \frac{d}{dz} B,$$

а в этом случае мы показали, что

$$\Phi = \text{const}.$$

Можно считать, что при движении в медленно изменяющемся магнитном поле частица как бы «скользит» по поверхности силовой магнитной трубки, выбор которой определяется в соответствии с её скоростью, зарядом и массой. Этот механизм работает в магнитосфере, которая защищает нас и все живое на Земле от солнечного ветра.

#### 4.6. Импульс электромагнитного поля

Электромагнитное поле – это реальность, которая проявляется через результат действия поля. Результат действия слабоперемежных полей мы рассмотрели в предыдущих разделах. Сейчас рассмотрим результат воздействия поля излучения, проявляющийся в давлении волны.

Пусть слева направо на полупространство, полностью поглощающее излучение, падает плоская электромагнитная волна (рис. 36). За время  $\Delta t$  волна проходит расстояние  $\Delta z = c\Delta t$ . Под действием электромагнитного излучения в веществе будут индуцированы токи, плотность которых оценивается как  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . В целом в выделенном объеме будет протекать ток  $I = j\Delta z\Delta y$ . В результате взаимодействия с магнитным полем возникает сила Лоренца, оцениваемая как

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \Delta q[\vec{v}, \vec{B}] = \Delta x \Delta y \Delta z \rho[\vec{v}, \vec{B}] = \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z [\vec{j}, \vec{B}] = \Delta x \Delta y \Delta z \sigma[\vec{E}, \vec{B}].\end{aligned}$$

Направление действия этой силы – слева направо. Именно эта сила толкает вещество. Как следствие, возникает давление на вещество и веществу передается импульс. На вакуум давление не оказывается.

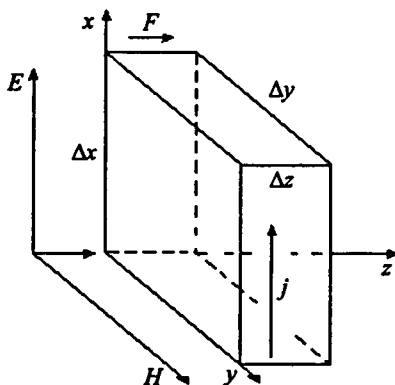


Рис. 36. Возникновение давления электромагнитной волны

Выразим действующую на объем силу Лоренца через вектор Пойнтинга. Для этого, считая, что объем полностью поглощает падающее излучение, запишем выражение для полной поглощенной за время  $\Delta t$  энергии:

$$\Delta U = P\Delta x\Delta y\Delta t = F_L\Delta z.$$

Отсюда сила Лоренца находится как

$$F_L = \frac{P\Delta x\Delta y}{c}.$$

Если силу отнести к площади, на которую эта сила прилагается, то получается величина давления:

$$f = \frac{F_{\text{л}}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Pi}{c}.$$

Импульс (количество движения), передаваемый всему объему волной, будет равен

$$\Delta P = F_{\text{л}} \Delta t = \frac{F_{\text{л}}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Pi}{c^2} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Импульс, приходящийся на единичный объем и называемый плотностью импульса, очевидно, равен

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Pi}{c^2} = \frac{f}{c}.$$

Петр Лебедев в своих опытах со светом (1901 год) реально измерил это давление и тем самым подтвердил реальность (материальность) существования электромагнитного поля. В настоящее время доказано, что электромагнитное поле обладает и массой, которая находится как

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

и следует из известного соотношения для кванта света

$$E = mc^2 = h\nu.$$

Здесь  $\nu$  — частота излучения. Масса покоя кванта света равна нулю.

#### 4.7. Диэлектрическая проницаемость облака заряженных частиц

Рассмотрим взаимодействие плоской гармонической волны с облаком заряженных частиц. Такая ситуация имеет место, например, при прохождении электромагнитной волны через плазму.

Пусть облако имеет разряженную структуру и состоит из однотипных, не связанных между собой заряженных частиц, имеющих определенный заряд и массу  $q$ ,  $m$ . Через  $V$  обозначим среднюю скорость заряженной частицы. На отдельную частицу, оказавшуюся в поле электромагнитной волны, будет действовать сила

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}\vec{B}]) .$$

Сопоставим между собой входящие в эту формулу слагаемые, учитывая, что для плоской волны  $E = Z_a H$ ,

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_L} = \frac{qE}{qVB} = \frac{Z_a}{V\mu_a} = \frac{c}{V}.$$

Поскольку фазовая скорость волны всегда много больше скорости частицы  $c \gg V$ , то сила Кулона оказывается доминирующей.

Запишем уравнение движения отдельной частицы:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} - \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Здесь  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – тормозящая частицу сила трения. Это может происходить, например, за счет соударений с другими частицами. В этом случае сила трения может быть оценена как

$$\vec{F}_{\text{тр}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{m\vec{V}}{\tau},$$

где среднее время между соударениями  $\tau$  обратно пропорционально среднему числу соударений в единицу времени  $v_{\text{эфф}} = \tau^{-1}$ . С учетом сказанного уравнение движения переписывается как

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q\vec{E} - m v_{\text{эфф}} \vec{V}.$$

Для решения воспользуемся методом комплексных амплитуд, полагая, что временная зависимость описывается множителем  $\exp\{-i\omega t\}$ . Уравнение для вектора комплексной амплитуды скорости принимает вид

$$-i\omega m \vec{V} + v_{\text{эфф}} m \vec{V} = q\vec{E},$$

откуда для отдельной частицы имеем

$$\vec{V} = \frac{q\vec{E}}{m(v_{\text{эфф}} - i\omega)}.$$

Если  $N$  – концентрация частиц, то для вектора комплексной амплитуды плотности тока можно записать

$$\vec{j} = Nq \vec{V} = \frac{q^2 N}{(v_{\text{эфф}} - i\omega)} \vec{E} \equiv \sigma_{\text{эфф}} \vec{E}.$$

Эффективная проводимость, соответствующая току частиц на частоте  $\omega$ , оказывается равной

$$\sigma_{эфф} = \frac{q^2 N}{m(v_{эфф} - i\omega)}.$$

Если теперь вспомнить определение комплексной диэлектрической проницаемости, вводимой в методе комплексных амплитуд, то для неё можно записать

$$\underline{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + i \frac{\sigma_{эфф}}{\omega} = \varepsilon_0 + \frac{iq^2 Ne}{\omega m(v_{эфф} - i\omega)}.$$

Проанализируем полученное выражение, выделив вещественную и мнимую части:

$$\underline{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - \frac{q^2 Ne}{m(v_{эфф}^2 + \omega^2)} + i \frac{q^2 Nev_{эфф}}{m\omega(v_{эфф}^2 + \omega^2)}.$$

Вещественная часть полученного соотношения характеризует собой усредненную абсолютную или, что равнозначно, относительную диэлектрические проницаемости облака заряженных частиц:

$$\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - \frac{q^2 Ne}{m(v_{эфф}^2 + \omega^2)}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\varepsilon}_a}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{q^2 Ne}{m(v_{эфф}^2 + \omega^2)\varepsilon_0}. \quad (4.4)$$

Мнимая часть позволяет установить усредненную удельную проводимость этого облака

$$\bar{\sigma} = \frac{q^2 Nev_{эфф}}{m(v_{эфф}^2 + \omega^2)}. \quad (4.5)$$

Если облако заряженных частиц находится в вакууме ( $\varepsilon = 1$ ), то его усредненная диэлектрическая проницаемость оказывается меньше единицы:

$$\bar{\varepsilon} = 1 - \frac{q^2 Ne}{m(v_{эфф}^2 + \omega^2)\varepsilon_0} \leq 1.$$

Это означает, что фазовая скорость электромагнитной волны становится выше скорости света в вакууме. С увеличением частоты ( $\omega \rightarrow \infty$ )

диэлектрическая проницаемость приближается к 1. Физически это означает, что заряды просто не успевают вслед за полем изменять направление своего движения. Согласно (4.4), существует частота  $\omega = \omega_{кр}$ , при которой  $\bar{\epsilon} = 0$ . Это частота, ниже которой облако заряженных частиц становится непрозрачным для электромагнитного излучения, и происходит его полное отражение.

Примером среды с описанными свойствами является ионосфера – верхняя часть атмосферы Земли, представляющая собой холодную плазму. Образуется ионосфера в результате ионизации атмосферных газов под действием ультрафиолетового излучения Солнца. На больших высотах плотность ультрафиолетового излучения велика, но мала плотность газов, на малых высотах плотность газов велика, но слабо ультрафиолетовое излучение. В результате для ионосферы существует максимум высотного профиля электронной концентрации (рис. 37). Как следствие, существует минимум диэлектрической проницаемости.

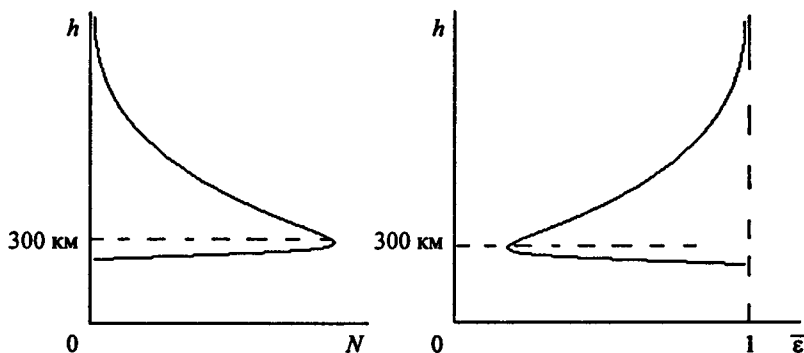


Рис. 37. Высотный профиль электронной концентрации и диэлектрической проницаемости ионосферы

Рассмотренная теория в определенной степени применима к описанию электронного газа в металлах. Согласно (4.5), проводимость металлов растет с увеличением концентрации носителей зарядов. Наличие примесей и дефектов кристаллической решетки приводит к увеличению  $\nu_{эф}$  и, в конечном счете, к уменьшению удельной проводимости, т.е. увеличению сопротивления.

#### 4.8. Диэлектрическая проницаемость неполярных диэлектриков

Диэлектрики в отличие от проводников характеризуются отсутствием в них свободных носителей зарядов. Электрические заряды, входящие в молекулы диэлектриков, находятся в связанном состоянии. При этом различают два сорта диэлектриков – полярные и неполярные. В полярных диэлектриках молекулы изначально представляют собой хаотически ориентированные диполи малых размеров, в то время как в неполярных диэлектриках пространственное разделение зарядов в молекулах образуется лишь при приложении внешнего поля. Начнем с неполярных диэлектриков.

Как известно, в диэлектриках, когда они оказываются в электромагнитном поле, возникает поляризуемость вещества, которая характеризуется вектором поляризованности

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p},$$

получающимся в результате суммирования множества элементарных дипольных моментов  $\vec{p}$  отдельных нейтральных молекул вещества, количество которых в единице объема (концентрация) есть  $N$ . Представим себе, что под действием внешнего поля  $\vec{E}$  центры положительных и отрицательных зарядов неполярных молекул расходятся на некоторое расстояние  $\vec{r}$  так, что  $\vec{p} = q\vec{r}$  (рис. 38).

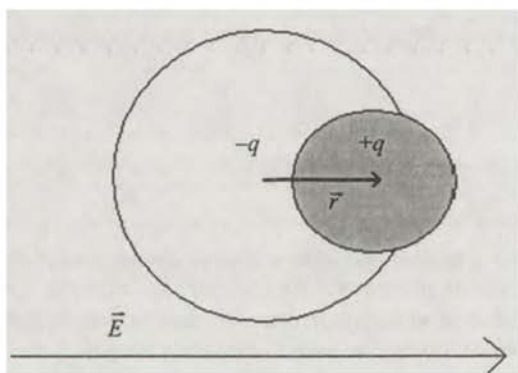


Рис. 38. Поляризуемость неполярной молекулы



Уравнение движения зарядов в молекуле может быть подобно (4.4) записано как

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = q \bar{E} - m v_{\text{эфф}} \frac{d \bar{r}}{dt} - \beta \bar{r}.$$

Здесь  $\beta \equiv m \omega_0^2$  – коэффициент упругости сил, возвращающих молекулу в исходное равновесное состояние. Этот коэффициент выражается через собственную частоту колебаний зарядов в молекуле  $\omega_0$ . Величина  $v_{\text{эфф}}$  характеризует некоторые эффективные соударения, которые приводят к затуханию собственных колебаний электронов в атомах.

Для решения этого уравнения, как и в предыдущем разделе, воспользуемся методом комплексных амплитуд, полагая, что временная зависимость описывается множителем  $\exp\{-i\omega t\}$ . Уравнение для вектора комплексной амплитуды смещения зарядов принимает вид

$$m(-i\omega)^2 \bar{r} = q \bar{E} - m v_{\text{эфф}} (-i\omega) \bar{r} - \beta \bar{r}. \quad (4.6)$$

В результате решения для комплексного вектора поляризованности имеем

$$\bar{P} = \frac{q^2 N \bar{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega v_{\text{эфф}})}.$$

Введение этой величины в вектор электрической индукции в случае изотропной среды

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon \bar{E} + \bar{P} \equiv \epsilon_0 \bar{\epsilon} \bar{E} \quad (4.7)$$

позволяет определить усредненную относительную комплексную диэлектрическую проницаемость неполярного диэлектрика:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega v_{\text{эфф}}} \equiv \epsilon' + i\epsilon'', \quad (4.8)$$

где  $\omega_p \equiv \sqrt{N/m\epsilon_0}$  – т.н. плазменная частота. Здесь  $\epsilon$  означает относительную диэлектрическую проницаемость вмещающей среды. Для вещественной и мнимой частей этой проницаемости имеем

$$\epsilon' = \epsilon + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega v_{\text{эфф}})^2}, \quad \epsilon'' = \frac{\omega_p^2 \omega v_{\text{эфф}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega v_{\text{эфф}})^2}.$$

Интересно отметить, что мнимая часть проницаемости  $\epsilon''$  на некоторой частоте имеет максимум, связанный с резонансным поглощением электромагнитной энергии и преобразованием её в тепло. Вещественная часть проницаемости  $\epsilon'$  при этом имеет аномальную дисперсию, т.е. уменьшается с ростом частоты. При малой величине  $\nu_{эфф}$  ( $\nu_{эфф} \ll \omega_0$ ) резонансная частота совпадает с частотой  $\omega_0$ , а ширина линии поглощения на половине её пика равна  $\nu_{эфф}$ .

Заметим, что в случае наличия в среде свободных носителей зарядов к мнимой части  $\epsilon''$  следует добавить поправку, содержащую соответствующую удельную проводимость:

$$\epsilon'' = \frac{\omega_p^2 \omega \nu_{эфф}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \nu_{эфф})^2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}.$$

#### 4.9. Диэлектрическая проницаемость полярных диэлектриков

В случае полярных диэлектриков молекулы изначально обладают собственными дипольными моментами, однако их ориентация хаотическая. При возникновении внешнего электрического поля молекулярные диполи обретают преимущественную ориентацию по полю (рис. 39).

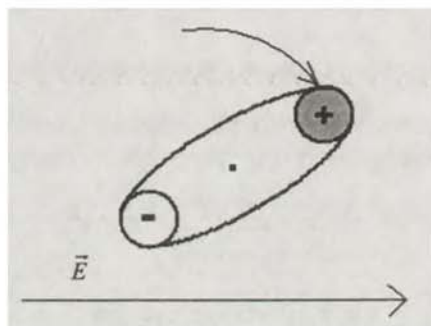


Рис. 39. Поляризуемость полярной молекулы

Предельное значение вектора поляризованности определяется величиной

$$\vec{P}_0 = \alpha_0 \vec{E},$$

где  $\alpha_0$  — коэффициент электрической восприимчивости среды в постоянном поле.

В общем случае, согласно дебаевской теории диэлектрической релаксации в полярных диэлектриках, считается, что скорость изменения вектора поляризованности в переменном поле прямо пропорциональна величине её отклонения от предельного значения:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{\bar{P}_0 - \bar{P}}{\tau_0},$$

Здесь  $\tau_0$  имеет смысл характерного времени релаксации, зависящего от температуры и типа вещества. Отсюда с использованием метода комплексных амплитуд имеем

$$-i\omega\bar{P} = (\bar{P}_0 - \bar{P})/\tau_0,$$

или 
$$\bar{P} = \bar{E} \frac{\alpha_0}{1 - i\omega\tau_0}.$$

С учетом определения (4.7) для относительной диэлектрической проницаемости полярного диэлектрика отсюда можно записать

$$\bar{\epsilon} = \epsilon + \frac{\alpha_0/\epsilon_0}{1 - i\omega\tau_0} \equiv \epsilon' + i\epsilon'',$$

или 
$$\bar{\epsilon} = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - i\omega\tau_0}. \quad (4.9)$$

Здесь  $\epsilon_\infty = \epsilon$  на предельно высоких частотах ( $\omega \rightarrow \infty$ ) совпадает с проницаемостью вмещающей среды, а  $\epsilon_s = \alpha_0/\epsilon_0$  означает относительную диэлектрическую проницаемость на предельно низких частотах ( $\omega \rightarrow 0$ ). Для вещественной и мнимой частей диэлектрической проницаемости имеют место соотношения

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + (\omega\tau_0)^2}, \quad \epsilon'' = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)\omega\tau_0}{1 + (\omega\tau_0)^2}.$$

Записанные формулы известны как формулы Дебая. В случае наличия в среде свободных носителей зарядов, например ионов солей в водном

растворе, к мнимой части  $\varepsilon''$  следует добавить поправку, содержащую соответствующую удельную проводимость:

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau_0}{1 + (\omega\tau_0)^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

Полученные выражения для диэлектрической проницаемости различных сред учитывают особенности взаимодействия излучения с веществом и конкретизируют их дисперсионные свойства.

## Глава 5

### РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

#### 5.1. Принцип относительности и постулат Эйнштейна

Электромагнитная волна – это объект, который движется в пространстве со скоростью света. Как свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные, уравнения Максвелла адекватно описывают электромагнитные поля. Следовательно, изначально уравнения Максвелла верны в релятивистском случае и не нуждаются в уточнении, например, в отличие от законов Ньютона. Для использования уравнений Максвелла и других связанных с ними уравнений электромагнетизма в релятивистском случае достаточно лишь переписать их в инвариантном виде. Переход от покоящихся зарядов к движущимся – это всего лишь преобразование системы координат, или, как говорят физики, вопрос выбора системы отсчета.

Среди бесконечного множества систем отсчета выделяют т.н. инерциальные системы отсчета. Инерциальная система отсчета (ИСО) – это такая система отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно. Покоящаяся система отсчета является частным случаем ИСО. Все ИСО равнозначны, и в этом заключается принцип относительности. Согласно этому принципу, все законы природы одинаковы во всех ИСО. Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны (имеют один и тот же вид) по отношению к преобразованиям координат и времени от одной ИСО к другой. Иначе это звучит как принцип однородности пространства и времени.

Около ста лет назад, в 1905 году, А. Эйнштейн дополнил принцип относительности еще одним вытекающим из экспериментальных данных постулатом: скорость света одинакова во всех ИСО. Принцип относительности, дополненный постулатом А. Эйнштейна, называется принципом релятивистской относительности. Именно этот принцип лежит в основе специальной теории относительности (СТО) для ИСО. В основе общей теории относительности лежат неинерциальные систе-

мы отсчета. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением следствий СТО в электродинамике.

## 5.2. Четырехвекторы и преобразование Лоренца

Требование постоянства скорости света ( $c = 2,99776 \cdot 10^8$  м/с) при переходе от одной ИСО к другой неизбежным образом приводит к преобразованию не только координат, но и времени. Выразим этот факт математически. Для удобства, а именно для того, чтобы придать формулам более симметричный вид, будем представлять все события как точки в четырехмерном пространстве с координатами  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ ,  $x_4 \equiv ict$  и  $i = \sqrt{-1}$ .

Рассмотрим, как выглядит процесс синхронизации времени в двух точках с помощью светового сигнала. Если событие  $A$  состоит в испускании света и ему соответствует начало координат, а событие  $B$  состоит в приеме посланного светового сигнала в точке с координатами  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , то интервал между этими событиями в четырехмерном пространстве равен нулю:

$$S^2 \equiv \sum_{j=1}^4 x_j^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0.$$

Для событий синхронизации интервал всегда равен нулю, причем во всех ИСО. Верно и обратное: если интервал между двумя событиями равен нулю в одной ИСО, то он равен нулю и в другой:  $S^2 = S'^2 = 0$ . Здесь  $S'$  соответствует интервалу в штрихованной системе координат.

Если два события сколь угодно близки друг к другу, то интервал между ними тоже мал  $dS^2$ , причем так же мал в любой другой ИСО:  $dS^2 = \alpha \cdot dS'^2$ . Здесь коэффициент пропорциональности  $\alpha$  может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости  $V$  обеих ИСО. Он не может зависеть от координат и времени, так как тогда различные точки пространства и времени были бы неравноценны, что противоречит однородности пространства и времени. Он не может зависеть также и от направления относительной скорости, так как это противоречило бы изотропности пространства. Но из-за равнозначности всех ИСО мы можем записать и наоборот:  $dS'^2 = \alpha \cdot dS^2$ . Последнее означает, что неизбежным образом  $\alpha^2 = 1$ . Это равносильно выполнению условий: либо  $dS' = dS$ , либо  $dS' = -dS$ . Поскольку в частном случае  $V = 0$ , очевидно

$S' \equiv S$ , то однозначно допустимо только условие  $dS' = dS$ . Выполнение интегрирования в этом равенстве приводит к равенству  $S' = S$  для всех ИСО, и это прямое следствие релятивистского принципа относительности: интервал в четырехмерном пространстве — величина, инвариантная во всех ИСО!

Установим вид преобразования компонент четырехмерных векторов, обеспечивающего инвариантность интервала. В силу равнозначности всех ИСО преобразование между ними следует искать среди линейных преобразований. Линейными преобразованиями, сохраняющими интервал, являются: параллельный перенос и вращение. Параллельный перенос — это всего лишь смещение начала координат, в том числе начала отсчета времени. Этого явно недостаточно для перехода от одной ИСО к другой. Остается вращение, причем в четырехмерном пространстве. Пусть некоторая инерциальная система отсчета  $K'$  движется относительно другой системы  $K$  с некоторой постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $Ox$ . При этом преобразование координат должно касаться только первой и четвертой компонент. Соответствующее вращение описывается формально как

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_4 \sin \varphi, \\ x_4 = x'_1 \sin \varphi + x'_4 \cos \varphi. \end{cases}$$

Здесь  $\varphi$  — угол поворота.

Определим угол  $\varphi$ , который может зависеть только от относительной скорости  $V$ . Для этого рассмотрим движение начала координат системы  $K'$  с точки зрения системы  $K$ . При  $x'_1 = 0$  очевидно имеем

$$x_1 = -x'_4 \sin \varphi, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = x'_4 \cos \varphi. \quad (5.1)$$

Отсюда 
$$\frac{x_1}{x_4} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Далее, вспоминая, что  $x_1 = x$ ,  $x_4 = ict$  и  $x = Vt$ , окончательно имеем  $\operatorname{tg} \varphi = iV/c$ . Если ввести обозначения

$$B = \frac{V}{c}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}},$$

то можно записать

$$\sin \varphi = iB\Gamma, \quad \cos \varphi = \Gamma.$$

Для преобразования компонент четырехмерного вектора из (5.1) получаем

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 - iB\Gamma x'_4, \\ x_2 &= 0x'_1 + x'_2 + 0x'_3 + 0x'_4, \\ x_3 &= 0x'_1 + 0x'_2 + x'_3 + 0\Gamma x'_4, \\ x_4 &= iB\Gamma x'_1 + 0x'_2 + 0x'_3 + \Gamma x'_4. \end{aligned} \right\}$$

Более кратко эти преобразования переписываются как

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j, \quad (5.2)$$

где по повторяющимся индексам идет суммирование и

$$\{\alpha_{ij}\} \equiv \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

— т.н. матрица Лоренца. Само преобразование (5.2) называется преобразованием Лоренца.

Обратное к (5.2) преобразование имеет вид

$$x'_i = \alpha'_{ij} x_j, \quad (5.3)$$

где в силу относительности движения для перехода к матрице Лоренца  $\{\alpha'_{ij}\}$  достаточно произвести замену  $V \rightarrow -V$ . Вычисление обратной матрицы при этом сводится к применению операции транспонирования:

$$\{\alpha'_{ij}\} = \{\alpha_{ij}\}^{-1} = \{\alpha_{ij}\}^T.$$

Это эквивалентно выполнению следующих равенств:

$$\alpha'_{ij} \alpha_{jk} = \delta_{ik} = \alpha_{ij} \alpha_{kj} = \alpha'_{ij} \alpha'_{kj}. \quad (5.4)$$

Здесь  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Преобразования вида (5.2) и (5.3) имеют очень простой, симметричный вид и являются ключевыми в СТО. Все четырехмерные векторы, компоненты которых преобразуются по правилам (5.2), (5.3), будем называть четырехвекторами, или кратко 4-векторами. Правила преобразования (5.2) и (5.3) называют правилами Лоренца. Пока мы определили только 4-вектор события  $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , первые три компоненты



которого образуют т.н. пространственную  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а четвертая компонента образует т.н. временную части  $x_4 = ict$  4-вектора. Кратко это записывают как  $R = (\mathbf{r}, ict)$ .

Один раз установив правило преобразования 4-векторов, в СТО рассматривают только такие векторы. Новые векторы строят так, чтобы правило Лоренца не нарушалось. Заметим, что если  $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  и  $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  — два 4-вектора, то их внешнее произведение  $A \otimes B = \{a_i b_j\}$  образует объект, который преобразуется по правилу

$$a_i b_j = \alpha_{ik} \alpha_{jl} a'_k b'_l. \quad (5.5)$$

В СТО все объекты  $T = \{T_{ij}\}$ , которые преобразуются по правилу (5.5), т.е. как

$$T_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T'_{kl}, \quad (5.6)$$

называются тензорами.

### 5.3. Четырехвекторы скорости и ускорения

В электродинамике наибольший интерес представляют поля движущихся зарядов, образующих токи. В связи с этим, прежде всего, определим понятие 4-вектора скорости движущейся частицы как производную 4-вектора её положения

$$U = \frac{d}{d\tau} R,$$

но так, чтобы правило Лоренца не нарушалось. Очевидно, что для этого переменная дифференцирования  $\tau$  должна быть инвариантом, т.е. не меняться при переходе от одной ИСО к другой. Для движущейся частицы этим временем  $\tau$  является время в т.н. мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчета (МСИСО).

Если через  $v$  обозначить мгновенную скорость частицы относительно исходной ИСО, то для исчезающе малого интервала, соответствующего малому перемещению частицы за время  $dt$ , можно записать

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2.$$

Отсюда имеем

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} = dt^2 \left( 1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2} \right) = dt^2 \frac{1}{\gamma^2},$$

где введены обозначения

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

В результате для 4-вектора скорости частицы получаем представление

$$U = \gamma \frac{d}{dt} R = \gamma (v_x, v_y, v_z, ic) = \gamma (\vec{v}, ic).$$

Здесь  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – вектор обычной трехмерной скорости частицы.

Очевидно, интервалом для 4-вектора скорости является величина  $U^2 = -c^2$ , и это действительно инвариант. Это подтверждает правильность определения 4-вектора скорости. Переход от одной ИСО к другой задается преобразованием Лоренца (5.2) и (5.3). В явном виде это записывается как

$$v'_x = \frac{v_x - V}{\Gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\Gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\Gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}$$

и совпадает с известными формулами преобразования скоростей.

Для 4-вектора ускорения частицы совершенно аналогично получаем

$$W = \frac{d^2}{d\tau^2} R = \gamma \frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{d}{dt} R \right).$$

При этом для интервала 4-вектора ускорения получаем соотношение

$$W^2 = \bar{a}^2,$$

где  $\bar{a} = (d^2 x / d\tau^2, d^2 y / d\tau^2, d^2 z / d\tau^2)$  – трехмерный вектор ускорения в МСИСО. Это очень важно, поскольку именно с ускорением связано появления свободно распространяющихся электромагнитных волн. Интересно, что 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны во всех ИСО:

$$UW = U dU / d\tau = 1/2 dU^2 / d\tau = 0.$$

### 5.4. Четырехвектор-потенциал и четырехвектор тока

Для описания электромагнитных полей в электродинамике широко используются векторный  $\vec{A}$  и скалярный  $\varphi$  потенциалы, которые удовлетворяют волновым уравнениям

$$\left[ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right] \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \left[ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right] \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

содержащими в правых частях плотность тока и плотность заряда. Между собой эти потенциалы связаны калибровкой Лоренца

$$\nabla \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t} = 0.$$

Объединим трехмерный векторный и одномерный скалярный потенциалы в один 4-вектор-потенциал. Для того чтобы это сделать, прежде всего, введем четырехмерный дифференциальный оператор (аналог оператора  $\nabla$ )

$$D \equiv (D_1, D_2, D_3, D_4) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial ict} \right).$$

Нетрудно убедиться, что этот оператор является 4-вектором, т.е. преобразуется по правилу Лоренца:  $D_i = \alpha_{ij} D'_j$ . Перепишем формально калибровку Лоренца в виде скалярного произведения – четырехмерного аналога дивергенции:

$$D \Phi = D_i \Phi_i = 0,$$

где введен четырехмерный вектор

$$\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = \left( A_x, A_y, A_z, \frac{i\varphi}{c} \right).$$

Калибровка Лоренца должна выполняться во всех ИСО, и это будет так, если вектор  $\Phi$  является 4-вектором, т.е. преобразуется по правилу Лоренца:  $\Phi_i = \alpha_{ij} \Phi'_j$ . Действительно, тогда с учетом (4) будет выполняться инвариантность калибровки Лоренца:

$$D \Phi = \alpha_{ij} D'_j \alpha_{ik} \Phi'_k = D' \Phi' = 0.$$

Это служит индикатором, но ещё не доказательством того, что введенный потенциал  $\Phi$  является 4-вектором. Ещё необходимо, по крайней мере, чтобы вектор  $\Phi$  удовлетворял волновому уравнению и сохранял его инвариантность.

Оператор Даламбера, входящий в волновое уравнение, во введенных релятивистских обозначениях переписывается как четырехмерный аналог оператора Лапласа

$$\left[ \nabla^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right] = D^2 = D_i D_i.$$

Этот оператор обладает полной релятивистской инвариантностью

$$D^2 = D_i D_i = \alpha_{ij} D'_j \alpha_{ik} D'_k = \delta_{jk} D'_j D'_k = D'_k D'_k = D'^2.$$

Само волновое уравнение для потенциала при этом выглядит как

$$D^2 \Phi = S,$$

где в качестве источника (правая часть уравнения) выступает четырехмерный вектор тока

$$S \equiv (j_x, j_y, j_z, ic\rho).$$

Если потенциал  $\Phi$  является 4-вектором, то 4-вектором является левая часть волнового уравнения, и тогда 4-вектором должен быть и вектор  $S$ . Полученная форма волнового уравнения тогда является инвариантом всех ИСО, т.е. будет выполняться уравнение

$$D'^2 \Phi' = S'.$$

То, что введенные выше векторы  $\Phi$  и  $S$  действительно являются 4-векторами, подтверждает инвариантность полученных уравнений и многочисленные следствия из этого, подтвержденные экспериментально.

## 5.5. Преобразования четырехвектора-потенциала и тока

Преобразование 4-вектора-потенциала и тока устанавливается преобразованиями Лоренца

$$\Phi_i = \alpha_{ij} \Phi'_j, \quad S_i = \alpha_{ij} S'_j.$$

В развернутом виде это записывается как

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Gamma\Phi'_1 - iB\Gamma\Phi'_4 \\ \Phi_2 &= \Phi'_2, \Phi_3 = \Phi'_3 \\ \Phi_4 &= iB\Gamma\Phi'_1 + \Gamma\Phi'_4 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} S_1 &= \Gamma S'_1 - iB\Gamma S'_4 \\ S_2 &= S'_2, S_3 = S'_3 \\ S_4 &= iB\Gamma S'_1 + \Gamma S'_4 \end{aligned} \right\},$$

или

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \Gamma A'_x + \frac{B\Gamma}{c} \Phi'_4 \\ A_y &= A'_y, A_z = A'_z \\ \varphi &= cB\Gamma A'_x + \Gamma\Phi'_4 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} j_x &= \Gamma j'_x + cB\Gamma\rho' \\ j_y &= j'_y, j_z = j'_z \\ \rho &= \frac{B\Gamma}{c} j'_x + \Gamma\rho' \end{aligned} \right\}.$$

Рассмотрим 4-вектор тока в МСИСО. Поскольку в этой системе нет движения зарядов и нет тока, то в ней  $S' \equiv (0, 0, 0, ic\rho_0)$ , и тогда с учетом замены  $B = \beta, \Gamma = \gamma$  имеем

$$\left. \begin{aligned} j_x &= \gamma v \rho_0, \\ j_y &= 0, j_z = 0, \\ \rho &= \gamma \rho_0. \end{aligned} \right\}$$

Это означает, что в ИСО появляется ток  $j_x = \gamma v \rho_0$ , который течет вдоль оси  $Ox$ . Наблюдается и плотность заряда, но она другая, чем в МСИСО. Для 4-вектора тока при этом имеем  $S = \gamma \rho_0 (0, 0, 0, ic) = \rho_0 U$ . Это соотношение является обобщением на четырехмерный случай известного классического равенства  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Из инвариантности интервала для 4-векторов имеем, что таким инвариантом для тока является  $S^2 = -c^2 \rho_0^2$ .

Мы установили, что при переходе от одной ИСО к другой меняется плотность заряда. Возникает вопрос: меняется ли сам заряд? Нет, не меняется, поскольку изменяются линейные размеры занимаемого объема  $dx = dx'/\gamma$ , а сам объем  $dV = dV'/\gamma$ . Так что  $dq = \rho dV = \rho_0 dV' = dq'$ . Таким образом, заряд не меняется и является инвариантом.

Рассмотрим случай, когда в некоторой ИСО нет зарядов, а есть только токи. В этой системе  $S' = (j'_x, j'_y, j'_z, 0)$ . При переходе к другой ИСО, конечно, будет наблюдаться изменение тока

$$j_x = \Gamma j'_x, j_y = j'_y, j_z = j'_z, \text{ но появится и плотность заряда } \rho = \frac{B\Gamma}{c} j'_x.$$

## 5.6. Тензор электромагнитного поля

Как известно, компоненты электромагнитного поля выражаются через электродинамические потенциалы с помощью соотношений

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = [\nabla \times \vec{A}].$$

При этом, например,

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right).$$

Аналогично можно записать, что

$$E_y = ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_4} \right), \quad E_z = ic \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_4} \right),$$

и далее

$$B_x = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad B_y = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1}, \quad B_z = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}.$$

Симметричность полученных соотношений позволяет объединить их все в одну формулу и образовать т.н. электродинамический тензор

$$F_{ij} = c \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.7)$$

Элементами тензора (5.7) являются соответствующие компоненты электромагнитного поля

$$F = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}.$$

Этот тензор – антисимметричный тензор второго ранга. Построение его подобно применению операции четырехмерного ротора  $F = c \cdot \text{Rot } \Phi$ . Размерность введенного здесь тензора совпадает с размерностью вектора напряженности электрического поля. Поэтому этот тензор называется электрически подобным тензором электромагнитного поля. Наряду с введенным тензором часто используется магнито-

подобный тензор, имеющий размерность напряженности магнитного поля и отличающийся от ранее введенного на постоянный множитель:

$$f_{ij} = F_{ij} / Z_0, \quad Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}.$$

Важно заметить, что тензор электромагнитного поля преобразуется по правилу Лоренца:

$$F_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} F'_{kl}; \quad (5.8)$$

$$f_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} f'_{kl}. \quad (5.9)$$

Доказательство этого следует непосредственно из определения.

Основные уравнения электродинамики – уравнения Максвелла – переписываются для тензора электромагнитного поля в компактном виде:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = S_i, \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Здесь, как и везде, по повторяющимся индексам идет суммирование. Первое из них эквивалентно первому и третьему уравнениям Максвелла, содержащим в качестве источников заряды и токи, а второе – второму и четвертому уравнениям, в которых нет магнитных токов и зарядов.

### 5.7. Преобразование компонент электромагнитного поля

Преобразование компонент электромагнитного поля при переходе из одной ИСО в другую задается с помощью преобразований Лоренца (5.8) и (5.9). Если расписать эти преобразования подробно, то получаются следующие соотношения:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \Gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \Gamma(E_z + VB_y).$$

Если выделить направление вдоль скорости движения ИСО (ось  $Ox$ ), то эти же соотношения можно переписать как

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad \vec{E}'_\perp = \Gamma(\vec{E}_\perp + [\vec{V}\vec{B}]). \quad (5.10)$$

Подобным же образом можно записать

$$B'_\parallel = B_\parallel, \quad \vec{B}'_\perp = \Gamma(\vec{B}_\perp - [\vec{V}\vec{E}]/c^2). \quad (5.11)$$

Отметим важный смысл полученных соотношений: они показывают, что электрические и магнитные поля едины по своей природе. Если в одной ИСО нет, например, магнитного поля, то при переходе к другой ИСО оно проявится. То же самое относится к электрическому полю. Это как две стороны одной медали: кажется, что они разные, а по сути это одно и то же. Соотношения (5.10) объясняют происхождение силы Лоренца – это всего лишь проявление перехода от одной ИСО к другой. Кроме того, соотношения (5.10) уточняют вид силы Лоренца:

$$F_{\parallel}' = qE_{\parallel}, \quad \bar{F}_{\perp}' = q\bar{E}_{\perp}' = q\Gamma(\bar{E}_{\perp} + [\vec{V}\bar{B}]).$$

Сделанные выводы являются первым новым результатом, который является прямым следствием последовательного использования релятивистских представлений в электродинамике.

Следующим важным следствием разработанного математического формализма является наличие инвариантов для электромагнитного поля. Подобно тому, как существуют инварианты для 4-векторов, например, интервалы  $S^2 = S_{\mu}S_{\mu}$ , для тензоров также существуют инварианты  $T_{ij}T_{ij}$ . Прямым следствием этого является инвариантность величин

$$I_1 = \vec{H}\vec{B} - \vec{D}\vec{E}, \quad I_2 = \vec{B}\vec{E}.$$

Первый инвариант означает, что разность плотностей магнитной и электрической энергий не меняется от выбора ИСО. Второй инвариант означает, что проекция вектора магнитного поля на электрическое поле постоянна во всех ИСО.

Кроме того, из первого инварианта следует, что если в какой-нибудь ИСО  $I_1 > 0$ , то можно отыскать ИСО, в которой  $\vec{E} = 0$ , но  $\vec{B} \neq 0$ . Верно и наоборот: если  $I_1 < 0$ , то можно отыскать ИСО, в которой  $\vec{B} = 0$ , но  $\vec{E} \neq 0$ . Если в одной ИСО  $\vec{B} \perp \vec{E}$ , то  $I_2 = 0$ , и можно найти ИСО, где  $\vec{E} = 0$ . Рецепт того, как это сделать, дают преобразования (5.10) и (5.11). Так может быть найдена, например, дрейфовая скорость  $\vec{v} = [\vec{E}\vec{B}]/\vec{B}^2$  при движении заряженной частицы в скрещенных постоянных электрическом и магнитном полях. Далее, если существует свободно распространяющаяся электромагнитная волна в одной ИСО, то она таковой остается во всех ИСО и при этом  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$ .



### 5.8. Потенциалы Льенара – Вихерта

Рассмотрим потенциалы, создаваемые произвольно движущимся зарядом  $q$ . Перейдем сначала в систему отсчета  $K'$  (МСИСО), в которой заряд покоится и находится в начале координат. Рассмотрим поле этого заряда в некоторой точке наблюдения  $\vec{r}_0$  в этой же системе отсчета. Потенциалы такого заряда записываются как  $\vec{A}=0, \varphi=q/(4\pi\epsilon_0 r_0)$ . Перепишем это в 4-мерном представлении:

$$\Phi' = (\vec{A}, i\varphi/c) = U'q/(4\pi\epsilon_0 c^2 r_0),$$

где  $U' = \gamma(0, ic)$ ,  $\gamma = 1$ . При переходе к другой ИСО величина  $r_0$  будет изменяться, поэтому перепишем её в виде, инвариантном к преобразованию Лоренца. Иначе 4-вектор-потенциал не будет таковым.

Если ввести 4-векторы скорости  $U' = (0, ic)$  и события, состоящего в регистрации поля  $R' = (\vec{r}_0, ic\Delta t)$ , то с учетом того, что  $r_0 = c\Delta t$ , можем записать  $U'R' = -cr_0$ . Тогда для 4-вектора потенциала имеем

$$\Phi' = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{U'}{U'R'}.$$

Это и есть 4-вектор потенциал Льенара – Вихерта. Инвариантность этого представления позволяет записать потенциал в любой другой ИСО, например, в системе  $K$ :

$$\Phi = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{U}{UR},$$

где  $U = \gamma(\vec{v}, ic)$  и  $R = (\vec{r}, ict)$ . При этом в развернутом виде имеем

$$\vec{A} = \frac{q\mu_0 \vec{v}}{4\pi(r - \vec{v}\vec{r}/c)}, \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r - \vec{v}\vec{r}/c)}.$$

Особенностью полученных выражений, кроме поправки в знаменателе, является учет запаздывания, выражающегося в том, что потенциалы наблюдаются в точке  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(t_n)$  в момент времени  $t_n$ , а источник поля находится в точке  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(t_n)$  в момент времени  $t_n$ , и эти моменты времени связаны трансцендентным уравнением

$$c(t_n - t_n) = |\vec{r}|, \quad \vec{r} = \vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n). \quad (5.12)$$

### 5.9. Электромагнитное поле произвольно движущегося заряда

Воспользуемся полученными в предыдущем разделе выражениями для потенциалов и рассчитаем компоненты электромагнитного поля, наблюдаемые в точке наблюдения. Согласно определению электродинамических потенциалов, компоненты электромагнитного поля находятся как

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t_n} - \nabla_n \varphi, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla_n \times \vec{A}].$$

При выполнении операций дифференцирования необходимо учитывать и неявные зависимости от переменных дифференцирования, например, зависимость времени действия источника от времени наблюдения и положения точки наблюдения. Для примера вычислим неявный градиент  $\nabla_n t_n$  путем дифференцирования левой и правой частей уравнения (5.12):

$$-c \nabla_n t_n = \nabla_n |\vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n)| = \frac{\vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n)}{|\vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n)|} - \left( \frac{\vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n)}{|\vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n)|} v \right) \nabla_n t.$$

Отсюда можно выразить

$$\nabla_n t_n = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{(r - \vec{r}v/c)} = -\frac{1}{c} \frac{\vec{r}}{r\bar{e}},$$

где  $\vec{r} \equiv \vec{r}_n(t_n) - \vec{r}_n(t_n), \quad \bar{e} \equiv \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{v}}{c}.$

Последовательно выполнив все дифференцирования, окончательно получаем следующие выражения для поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \vec{H} = \frac{1}{Z_0} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \vec{E} \right],$$

$$\text{где } \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{e} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) r}{(\vec{r}\bar{e})^3}, \quad \vec{E}_2 = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{r}[\bar{e}\vec{a}]]r}{(\vec{r}\bar{e})^3}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi.$$

Проведем анализ полученных выражений. Магнитное поле всегда поперечно. Все электрическое поле условно можно разделить на квазистатическое  $\vec{E}_1$  и на поле излучения  $\vec{E}_2$ . Полю излучения соответствует слагаемое, содержащее ускорение заряда  $\vec{a}$ . Это поле поперечно к направлению на точку наблюдения и убывает обратно пропорционально расстоянию. Поле излучения зависит от направления излучения. Если направления скорости заряда и ускорения совпадают и через  $\theta$  обозначить угол между этим направлением и направлением излучения, то можно записать, что

$$|\vec{E}_2| = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{|\vec{a}|\sin\theta}{r(1-\beta\cos\theta)^3}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Вектор Пойнтинга для поля излучения всегда направлен по радиусу, и для него можно записать

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{Z_0} \frac{\vec{r}}{r} \vec{a}^2 \left( \frac{q\mu_0}{4\pi r} \right)^2 F(\theta),$$

где

$$F(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}$$

характеризует собой диаграмму направленности по мощности. Анализ на экстремум показывает, что максимум диаграммы направленности приходится на угол, определяемый соотношением

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+24\beta^2}-1}{4\beta}.$$

Этот максимум перпендикулярен ускорению при малых скоростях заряда и приближается к направлению скорости при больших скоростях заряда.

## 5.10. Эффект Доплера

Рассмотрим плоскую волну с компонентами поля

$$E = E_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t), \quad H = H_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t).$$

Здесь  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \vec{n}\omega/c$  – трехмерный волновой вектор. Единичный вектор  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  описывает направление распространения волны,

совпадающее с нормалью к плоскости волнового фронта. Как показано в п. 5.7, плоская волна остается плоской во всех ИСО, следовательно, описывается подобным образом. Сохраняется синфазность изменения электрических и магнитных компонент: если в какой-то точке поле равно нулю, то оно равно нулю и во всех ИСО. В конечном счете, это означает, что полная фаза волны является инвариантом ИСО:

$$\Psi = \vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{inv}.$$

Введем четырехмерные векторы:

$$R \equiv (x, y, z, ict) \quad \text{и} \quad K \equiv (k_x, k_y, k_z, i\omega/c).$$

Здесь  $K$  называется четырехмерным волновым вектором. Тогда полная фаза записывается как скалярное произведение:  $\Psi = KR$ . Поскольку четырехмерный вектор события  $R$  является 4-вектором, а полная фаза является инвариантом, то это означает, что вектор  $K$  также является 4-вектором. Скалярное произведение 4-векторов является инвариантом всех ИСО.

Из 4-векторности волнового вектора следует закон преобразования его компонент — правило Лоренца:

$$K_i = \alpha_{ij} K'_j.$$

В развернутом виде это записывается как

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} n_x \\ \frac{\omega}{c} n_y \\ \frac{\omega}{c} n_z \\ \frac{\omega}{c} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c} n'_x \\ \frac{\omega'}{c} n'_y \\ \frac{\omega'}{c} n'_z \\ \frac{\omega'}{c} i \end{bmatrix}.$$

Имея в виду, что произведение  $Vn_x = V_{\parallel}$  совпадает с продольной компонентой скорости в соответствующей ИСО, для четвертой компоненты вектора имеем

$$\omega = \omega' \Gamma \left( 1 + \frac{V_{\parallel}}{c} \right).$$

Это же соотношение можно переписать как

$$\omega' = \omega \Gamma \left( 1 - \frac{V_{\parallel}}{c} \right), \quad \text{или} \quad \omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - (V/c)^2}}{\left( 1 - \frac{V_{\parallel}}{c} \right)}.$$

Из последнего соотношения видно, что частоты  $\omega$  и  $\omega'$  в различных ИСО отличаются, т.е. имеет место эффект Доплера. В отличие от классической (нерелятивистской) физики, этот эффект возникает, даже если продольная скорость равна нулю:  $V_{\parallel} = 0$ . В этом случае частота опреде-

ляется как  $\omega = \omega' \sqrt{1 - (V_{\perp}/c)^2}$ . Смещение частоты при этом называется поперечным эффектом Доплера. Величина смещения частоты при этом существенно меньше.

Заметим, что направление распространения волны зависит от выбора ИСО. Изменение этого направления при переходе от одной ИСО с другой называется абберацией. Можно сказать, что абберация – это пространственная проекция, а эффект Доплера – временная проекция преобразований ИСО.

## 5.11. Резюме

Приведенный краткий экскурс в электродинамику СТО показывает, что релятивистские представления позволяют не только более изящно записывать исходные уравнения электродинамики, но и понять физическое единство электромагнитных полей. Это самое главное! В этом представлении электрические и магнитные поля – это всего лишь различные проекции единого физического объекта – электромагнитного поля.

Последовательное использование релятивистских представлений, кроме того, дает нам целый ряд конкретных следствий, обычно пропускаемых в классических представлениях, например, при описании процесса излучения при релятивистских скоростях, поперечного эффекта Доплера и др. Современные экспериментальные данные и технические средства полностью подтверждают эти результаты.

Любопытно заметить, что изложенные здесь результаты имеют уже почти столетнюю историю, но всё ещё для многих остаются непривычными.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В нашем курсе мы начали с уравнений Максвелла – вершины теории электромагнетизма. Далее построили математический аппарат для решения уравнений Максвелла с заданными источниками. На простейшем примере колеблющегося электрического диполя Герца пришли к особому виду электромагнитного поля – полю излучения, проанализировали его основные свойства. Сформулировали основные принципы электродинамики. Затем показали основные механизмы взаимодействия излучения с веществом. И наконец, придали основным электродинамическим соотношениям релятивистски инвариантный вид, что позволило закрепить представление о единстве электрических и магнитных полей и установить ряд важных закономерностей.

В современной физической картине мира электродинамике, как науке, занимающейся наиболее сильными в макром мире взаимодействиями, принадлежит особое место. В этом смысле она является мировоззренческим курсом, который является связующим для многих наук современного естествознания, а уж для радиофизики и радиоэлектроники – основополагающим. Как автор этой книги надеюсь, что знакомство с электродинамикой в предложенном варианте оказалось полезным читателю, как молодому, только вступающему в науку, так и более умудренному опытом.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля: Учебное пособие. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
2. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.6. Электродинамика. – М.: Мир, 1966. – 344 с.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1992. – 416 с.
4. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Радио и связь, 2000. – 559 с.
5. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн / Под ред. С.И. Баскакова. – М.: Высшая школа, 1981. – 208 с.
6. Якубов В.П. Комплексные представления в электродинамике: Методические указания. – Томск: УОП Том. ун-та, 1994. – 16 с.

### Дополнительная

1. Дуков В.М. Электродинамика (История и методология макроскопической электродинамики): Уч. пособие для ун-тов. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.
2. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: ИЛ, 1958. – 501 с.
3. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 540 с.
4. Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962. – 256 с.
5. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
6. Матвеев А.Н. Электродинамика. – М.: Высшая школа, 1970.
7. Фёдоров В.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1980. – 399 с.
8. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1980. – 335 с.
9. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1962. – 504 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

аберрация, 123  
активная часть вектора Пойнтин-  
га, 65  
аналитический сигнал, 59

### Б

ближняя зона, 49

### В

вектор Герца, 6, 37, 38, 39, 45, 46,  
47, 48, 63  
вектор магнитной индукции, 61  
вектор Пойнтинга, 6, 25, 30, 50,  
65, 70, 72, 73, 97  
вектор поляризуемости, 38, 39  
вектор электрической индукции,  
61, 103  
векторный потенциал, 35, 63  
волновое уравнение, 34, 35, 38, 39,  
40, 41, 114  
волновое число, 6, 41, 62

### Г

граничные условия, 31, 33

### Д

давление электромагнитного поля,  
96  
дальняя зона, 49, 50, 71  
диаграмма направленности, 52,  
85, 86  
диполь Герца, 44, 47, 67

дипольный момент, 45, 47, 48, 93,  
94, 95  
диэлектрическая проницаемость,  
100, 101

### З

закон Био – Савара – Лапласа, 17,  
43  
закон Гаусса, 17  
закон Кирхгофа, 17, 18  
закон Кулона, 16  
закон сохранения заряда, 15, 60  
закон Фарадея, 16

### И

импедансные граничные условия,  
25  
импульс электромагнитного поля,  
96  
ионосфера, 101

### К

калибровка Лоренца, 37, 38, 63  
комплексная диэлектрическая  
проницаемость, 61, 100  
комплексная магнитная прони-  
цаемость, 61  
комплексная проводимость, 61  
комплексный вектор Пойнтинга,  
64  
критическая частота, 7  
круговая поляризация, 77



**Л**

лемма Лоренца, 80  
линейная поляризация, 75, 78

**М**

магнитная постоянная, 7, 13  
магнитная проницаемость, 7, 13  
магнитный диполь, 54, 93  
матрица Лоренца, 110  
мгновенно сопутствующая инерциальная система отсчета, 111  
метод комплексных амплитуд, 57, 59

**Н**

напряженность магнитного поля, 44, 92  
напряженность электрического поля, 34, 46, 74, 85, 116

**О**

ортогональные поляризации, 75

**П**

плоская волна, 122  
плотность заряда, 12, 24, 113, 115  
плотность магнитной энергии, 118  
плотность тока, 113  
плотность электрической энергии, 28  
поверхностный ток, 22  
потенциалы Льенара – Вихерта, 119  
приближение Кирхгофа, 83  
принцип Гюйгенса – Френеля, 81, 83  
принцип перестановочной двойственности, 21, 24, 34, 56, 61, 72, 83

принцип релятивистской относительности Эйнштейна, 107

**Р**

реактивная часть вектора Пойнтинга, 65  
решение в запаздывающих потенциалах, 42

**С**

сила Лоренца, 88, 97  
сила радиационного трения, 53  
скалярный потенциал, 6, 36, 37, 63, 113  
скорость дрейфа, 91  
скорость света, 10, 107  
сопротивление излучения, 6  
сторонние источники, 31, 62  
сферическая волна, 40

**Т**

тензор электромагнитного поля, 117  
теорема взаимности, 79, 80  
теорема единственности решения уравнений Максвелла, 11, 31  
теорема Пойнтинга, 11, 25, 28, 30, 31, 63, 66  
тепловые потери, 26  
ток проводимости, 19  
ток смещения, 9, 18, 19

**У**

удельная проводимость, 7, 13, 29  
уравнение силовых линий, 144  
уравнения Максвелла, 9, 10, 13, 15, 17, 20, 21, 33, 36, 60, 61, 62, 64, 94, 107, 117

**Ф**

фазовая скорость, 6, 99, 100  
формула Стрэттона – Чу, 83

**Ц**

циклотронная частота, 88  
циклотронный радиус, 88  
цилиндрическая волна, 40

**Ч**

четырёхвектор скорости, 111  
четырёхвектор события, 110  
четырёхвектор тока, 113  
четырёхвектор ускорения, 112  
четырёхвектор-потенциал, 113

четырёхмерный волновой вектор, 122

число соударений, 99

**Э**

эквивалентная длина магнитного  
вибратора, 73

эквивалентные источники, 81, 83

электрическая постоянная, 7, 13

электродвижущая сила, 15

элемент Гюйгенса, 84

элементарный электрический  
вибратор, 84

эллиптическая поляризация, 78

эффект Доплера, 123

# Приложение 1

## ЗАДАЧИ

### 1. Стационарная электродинамика

#### Задача 1

Используя принцип суперпозиции, вычислить пространственное распределение скалярного потенциала и вектора напряженности электрического поля для элементарного диполя Герца.

Ответ: 
$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - d \cos \theta} - \frac{1}{r + d \cos \theta} \right),$$

$$E_r(r, \theta) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta, \quad E_\theta(r, \theta) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta, \quad p = qd.$$

#### Задача 2

Бесконечно длинный диэлектрический цилиндр радиуса  $a$  с проницаемостью  $\epsilon_a$  помещен в поперечное однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Рассчитать пространственное распределение скалярного потенциала вне цилиндра. Указание: в цилиндрической системе координат использовать граничные условия

$$E_\theta(r = -a, \theta) = E_\theta(r = +a, \theta), \quad \epsilon E_r(r = -a, \theta) = E_r(r = +a, \theta), \\ \vec{E}(r = \infty, \theta) = \vec{E}_0,$$

и метод разделения переменных.

Ответ: 
$$\varphi(r, \theta) = E_0 \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \theta.$$

#### Задача 3

Бесконечно длинный металлический цилиндр радиуса  $a$  помещен в поперечное однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Рассчитать пространственное распределение скалярного потенциала и вектора напряженности электрического поля вне цилиндра. Указание: в цилиндрической системе координат использовать граничные условия

$$E_\theta(r=a, \theta) = 0, \quad \vec{E}(r=\infty, \theta) = \vec{E}_0,$$

и метод разделения переменных.

Ответ:  $\varphi(r, \theta) = E_0 \left( \frac{a^2}{r} - r \right) \cos \theta,$

$$E_r(r, \theta) = E_0 \left( \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \cos \theta, \quad E_\theta(r, \theta) = E_0 \left( -\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin \theta.$$

#### Задача 4

Имеется металлическая заземленная сфера радиуса  $a$ . Вблизи неё на расстоянии  $R$  находится точечный заряд  $q$ . Найти величину  $Q$  и положение  $r$  индуцированного заряда. Указание: использовать метод зеркальных изображений, полагая сферу совпадающей с одной из эквипотенциальных поверхностей.

Ответ:  $r = \frac{a^2}{R}, \quad Q = -q \frac{a}{R}.$

#### Задача 5

Металлический шар радиуса  $a$  помещен в однородное электрическое поле  $\vec{E}_0$ . Рассчитать пространственное распределение скалярного потенциала и вектора напряженности электрического поля вне шара. Указание: в сферической системе координат использовать граничные условия

$$E_\theta(r=a, \theta) = 0, \quad \vec{E}(r=\infty, \theta) = \vec{E}_0,$$

и метод разделения переменных.

Ответ:  $\varphi(r, \theta) = E_0 \left( \frac{a^3}{r^2} - r \right) \cos \theta,$

$$E_r(r, \theta) = E_0 \left( 2 \frac{a^3}{r^3} + 1 \right) \cos \theta, \quad E_\theta(r, \theta) = E_0 \left( -\frac{a^3}{r^3} + 1 \right) \sin \theta.$$

#### Задача 6

Используя решение предыдущей задачи, найти индуцированный на шаре дипольный момент, индуцированный заряд и эффективный размер эквивалентного диполя.

Ответ:  $p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0, \quad q = 3\pi\epsilon_0 a^2 E_0, \quad d = 2/3 \cdot (2a).$

## Задача 7

Скалярный потенциал  $\varphi(x,y)$  двумерного электростатического поля является гармонической функцией, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Можно ли определить комплексный потенциал – аналитическую функцию  $W(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  так, чтобы её вещественная часть  $\operatorname{Re}\{W(z)\}$  совпадала бы с функцией  $\varphi(x,y)$ ?

**Решение.** Да, поскольку вследствие условий дифференцируемости Коши – Римана вещественная и мнимая части, а значит, и сама аналитическая функция удовлетворяют уравнению Лапласа. Положим, что

$$\operatorname{Re}\{W(z)\} \equiv U(x,y) = -\varphi(x,y).$$

Для полного определения комплексного потенциала достаточно найти функцию

$$V(x,y) \equiv \operatorname{Im}\{W(z)\}.$$

Сделать это можно, удовлетворив условиям дифференцируемости Коши – Римана:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Если решить эти уравнения относительно функции  $V(x,y)$ , то комплексный потенциал записывается как  $W = U + iV$ .

Достоинством определения соответствующего комплексного потенциала является возможность использовать простейшие потенциалы для нахождения сложных потенциалов путем применения теории конформных преобразований.

## Задача 8

Как с помощью комплексного потенциала найти напряженность соответствующего электрического поля?

**Решение.** С учетом того, что

$$\vec{E} = -\nabla\varphi,$$

путем простого дифференцирования и использования условий Коши – Римана можно записать

$$\frac{dW}{dz} = E_x - i E_y,$$

или 
$$E_x = \operatorname{Re}\left(\frac{dW}{dz}\right), \quad E_y = -\operatorname{Im}\left(\frac{dW}{dz}\right).$$

### Задача 9

Найти комплексный потенциал для поля над бесконечно протяженной плоскостью, имеющей поверхностную плотность заряда  $\sigma$ .

**Решение.** Будем считать заряженную плоскость совпадающей с плоскостью  $y=0$ . Из третьего уравнения Максвелла в интегральной форме можно записать

$$\vec{E} = E_y \vec{e}_y, \quad E_y = \sigma/2\varepsilon_0.$$

Соответствующий этому потенциал равен

$$\varphi(x, y) = -y\sigma/2\varepsilon_0, \quad \text{или} \quad U(x, y) = y\sigma/2\varepsilon_0.$$

Использование условий Коши – Римана дает  $V(x, y) = -x\sigma/2\varepsilon_0$ . В итоге имеем

$$W = U + iV = -iz\sigma/2\varepsilon_0.$$

### Задача 10

С помощью комплексного потенциала заряженной плоскости найти соответствующий потенциал внутри находящегося под разностью потенциалов  $\varphi_0$  плоского конденсатора толщиной  $d$ . Указание: воспользоваться решением предыдущей задачи и принципом суперпозиции.

**Ответ:**  $W = i\varphi_0 z/d$ .

### Задача 11

С помощью конформного преобразования найти комплексный потенциал бесконечного коаксиального конденсатора, находящегося под разностью потенциалов  $\varphi_0$ .

**Ответ:**  $W = \varphi_0 \ln(z/a)/\ln(b/a)$ , где  $a$  и  $b$  – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров конденсатора.

## Задача 12

Металлический шар радиусом  $a$  окружён концентрической тонкой металлической оболочкой радиусом  $b$ . Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найти сопротивление межэлектродного промежутка.

**Решение.** Выделим мысленно тонкий сферический слой между радиусами  $a$  и  $r + dr$ . Линии тока во всех точках этого слоя идут перпендикулярно ему, поэтому такой слой можно рассматривать как цилиндрический проводник длиной  $dr$  с площадью поперечного сечения  $4\pi r^2$ . Воспользовавшись формулой для сопротивления цилиндрического проводника, запишем

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}.$$

Проинтегрировав это выражение по  $r$  от  $a$  до  $b$ , получим

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

## Задача 13

Два металлических шарика одинакового радиуса  $a$  находятся в однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найти сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между шариками значительно больше их размеров.

**Решение.** Мысленно зарядим шарики  $+q$  и  $-q$ . Поскольку шарики находятся далеко друг от друга, электрическое поле вблизи поверхности каждого из них определяется практически только зарядом прилегающего шарика, причём его заряд можно считать распределённым равномерно по поверхности. Окружив шарик с положительным зарядом концентрической сферой, непосредственно прилегающей к его поверхности, запишем выражение для тока, протекающего через эту сферу:

$$I = 4\pi a^2 j,$$

где  $j$  — плотность тока. Воспользовавшись законом Ома  $E = q/4\pi\epsilon_0 a^2$  и формулой  $E = q/4\pi\epsilon_0 a^2$ , получим

$$I = q/\epsilon_0 \rho.$$

Далее найдём разность потенциалов между шариками:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- \approx 2q / 4\pi\epsilon_0 a^2.$$

Искомое сопротивление

$$R = U / I = \rho / 2\pi a.$$

Этот результат справедлив, независимо от диэлектрической проницаемости среды.

#### Задача 14

Два проводника произвольной формы находятся в безграничной однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Найти значения произведения  $RC$  для данной системы, где  $R$  — сопротивление среды между проводниками,  $C$  — взаимная ёмкость проводников при наличии среды.

**Решение.** Зарядим мысленно проводники зарядами  $+q$  и  $-q$ . Так как среда между ними слабо проводящая, то поверхности проводников являются эквипотенциальными и конфигурация поля такая же, как и при отсутствии среды.

Окружим, например, положительно заряженный проводник замкнутой поверхностью  $S$ , непосредственно прилегающей к поверхности проводника, и вычислим отдельно  $R$  и  $C$ :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{\oint j_n dS} = \frac{U}{\sigma \oint E_n dS},$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\oint D_n dS}{U} = \frac{\epsilon \epsilon_0 \oint E_n dS}{U},$$

где интегралы взяты по данной поверхности  $S$ . При вычислении  $R$  был использован закон Ома, а при вычислении  $C$  — теорема Гаусса. Произведение полученных выражений дает

$$RC = \epsilon_0 \epsilon / \sigma = \epsilon_0 \epsilon \rho.$$

#### Задача 15

Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями 1 и 2 толщиной  $l_1$  и  $l_2$  прони-



цаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  и удельными сопротивлениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Конденсатор находится под постоянным напряжением  $U$ , причём электрическое поле направлено от слоя 1 к слою 2. Найти поверхностную плотность сторонних зарядов на границе раздела диэлектрических слоёв.

**Решение.** Искомая поверхностная плотность зарядов

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_2 - \epsilon_0 \epsilon_1 E_1.$$

Для определения  $E_1$  и  $E_2$  воспользуемся двумя условиями: из того факта, что  $j_1 = j_2$  следует  $E_1/\rho_1 = E_2/\rho_2$  и, кроме того,  $E_1 l_1 + E_2 l_2 = U$ . Решив два последних уравнения, найдём  $E_1$  и  $E_2$ . Их подстановка в (1) приводит к следующему результату:

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 \rho_2 - \epsilon_1 \rho_1}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2} \epsilon_0 U.$$

Отсюда видно, что  $\sigma = 0$  при  $\epsilon_2 \rho_2 = \epsilon_1 \rho_1$ .

### Задача 16

Виток с током может рассматриваться как магнитный диполь. Найти поле стационарного элементарного магнитного диполя радиуса  $a$  с током  $I$ . Указание: использовать векторный потенциал.

**Ответ:**

$$H_r(r, \theta) = \frac{p_m}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta, \quad H_\theta(r, \theta) = \frac{p_m}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta, \quad p_m = \mu_0 \pi a^2 I.$$

## 2. Теория излучения

### Задача 17

Магнитная составляющая поля излучения движущегося с ускорением  $\vec{a}$  заряда  $q$  определяется соотношением

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi c |\vec{r}|} [\vec{a} \vec{e}], \quad \text{где } \vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Найти полную мощность излучения. Указание: использовать вектор Пойнтинга.

**Ответ:**  $J = \frac{\mu_0}{6\pi c} (qa)^2.$

## Задача 18

В предложенной Бором модели атома водорода электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом  $R = 0,53 \cdot 10^{-10}$  м. С какой скоростью  $J$  электрон излучает энергию и за какое время в этих условиях будет испущена энергия в  $W = 7$  эВ, что составляет примерно половину энергии связи электрона?

$$\text{Ответ: } J = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left( q \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2 m} \right)^2 = 4,61 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 2,88 \cdot 10^{11} \frac{\text{эВ}}{\text{с}},$$

$\Delta t = 2,43 \cdot 10^{-2}$  нс, где  $q$  и  $m$  – заряд и масса электрона.

## Задача 19

Падающий на Землю солнечный свет обеспечивает мощность притока энергии на единицу площади, равную  $\Pi = 1,35$  кВт/м<sup>2</sup>. Чему равно среднеквадратичное значение напряженности электрического поля?

$$\text{Ответ: } \bar{E} = \sqrt{\Pi Z_0} = 713 \text{ В/м}.$$

## Задача 20

Свет от яркой лампы мощностью  $P = 100$  Вт фокусируется на отражающей лопасти радиометра. С какой силой свет давит на лопасть?

$$\text{Ответ: } F = \frac{2P}{c} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

## Задача 21

Частица массой  $m$  и зарядом  $q$  влетает в магнитное поле  $B$  со скоростью  $V$ . Найти мощность излучения частицы.

$$\text{Ответ: } J = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left( q \frac{qVB}{m} \right)^2.$$

## Задача 22

Заряд  $Q$  движется с ускорением  $\bar{a}$ . Найти силу, с которой поле излучения этого заряда действует на покоящийся в начальный момент другой заряд  $q$ .

**Решение.** Напряженность поля излучения находится как

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r} [[\vec{a} \vec{e}] \vec{e}], \text{ где } \vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Искомая сила тогда равна

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\mu_0 q Q}{4\pi r} [[\vec{a} \vec{e}] \vec{e}].$$

### Задача 23

Заряд  $Q$  равномерно распределен по кольцу радиуса  $R$ , которое движется по оси с ускорением  $\vec{a}$ . Найти силу, с которой поле излучения этого заряда действует на покоящийся в начальный момент другой заряд  $q$ , расположенный на оси на расстоянии  $d$  от кольца. Указание: использовать решение предыдущей задачи, проинтегрировав силу от каждого участка кольца.

Ответ: 
$$F = \frac{\mu_0 q Q a R}{(2\pi R) 4\pi (d^2 + R^2)^{3/2}}.$$

### Задача 24

По бесконечно протяженной проводящей плоскости течет переменный ток с поверхностной плотностью  $j(t)$ . Найти создаваемое электромагнитное поле.

**Решение.** Из одномерности задачи очевидно, что все компоненты электромагнитного поля могут зависеть только от времени  $t$  и от расстояния точки наблюдения  $x$  до плоскости с током. При этом электрическое и магнитное поля имеют только по одной отличной от нуля компоненте

$$\vec{E} = (0, E_y, 0) \text{ и } \vec{H} = (0, 0, H_z).$$

Поскольку все компоненты поля должны удовлетворять волновым уравнениям, то можно сразу записать

$$E_y = E_y \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad H_z = H_z \left( t - \frac{x}{c} \right).$$

Из граничного условия при  $x = 0$  можно записать

$$H_z \left( t - \frac{x}{c} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} j(t), \text{ т.е. } H_z(x, t) = \frac{1}{2} j \left( t - \frac{x}{c} \right).$$

Подстановка этого решения во второе уравнение Максвелла дает дифференциальное уравнение

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi cr} [\vec{a} \vec{e}],$$

а его решение — 
$$E_y(x, t) = \frac{\mu_0 c}{2} j \left( t - \frac{x}{c} \right) = Z_0 H_z.$$

Полученные компоненты полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  представляют собой запись плоской электромагнитной волны в общем виде.

### Задача 25

Частица с зарядом  $q$  движется со скоростью  $V$ , упруго отражается от некоторой плоскости. Определить длинноволновую часть спектра излучения в момент удара.

**Решение.**

В первом приближении скорость частицы в момент удара меняется скачком на величину  $2V$ , т.е. скорость изменяется во времени по закону

$$\frac{dx}{dt} = -V \operatorname{sgn}(t).$$

Этому соответствует ускорение  $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -2V \delta(t)$ , и поле излучения  $\vec{E}$  вида

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q\mu_0}{2\pi|\vec{r}|} [\vec{e} [\vec{e} \vec{V}]] \delta(t), \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Искомый спектр поля излучения имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \exp(i\omega t) dt = \frac{q\mu_0}{2\pi|\vec{r}|} [\vec{e} [\vec{e} \vec{V}]].$$

Энергия излучения в единицу телесного угла в единичном интервале частот описывается выражением

$$\frac{dJ(\omega)}{d\Omega} = \left( \frac{q\mu_0 \vec{V}}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{Z_0} \sin^2 \theta.$$

Здесь  $\theta$  – угол, соответствующий направлению излучения. Видно, что максимум излучения лежит в отражающей плоскости. После интегрирования по полусфере имеем

$$J(\omega) = \frac{2}{3} \frac{q^2 \bar{V}^2}{\pi c^3 \epsilon_0}.$$

### Задача 26

Как, измерив комплексный вектор напряженности плоской электромагнитной волны эллиптической поляризации, найти направление её распространения?

**Решение.** Направление распространения эллиптически поляризованной волны всегда ортогонально направлению вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Комплексный вектор  $\vec{E}$  состоит из вещественных векторов квадратур поля  $\vec{C} = \text{Re}(\vec{E})$  и  $\vec{S} = \text{Im}(\vec{E})$ , которые для эллиптически поляризованной волны не параллельны и лежат в плоскости эллипса поляризации. Векторное произведение

$$\vec{N} = \vec{C} \times \vec{S}$$

совпадает с направлением нормали к эллипсу поляризации, а значит – и с направлением распространения волны. Единичный вектор направления распространения волны определяется далее путем перенормировки

$$\vec{e} = \vec{N} / |\vec{N}|.$$

### Задача 27

Монохроматическая плоская электромагнитная волна с частотой  $\omega$  распространяется в среде с комплексным показателем преломления  $n = n' + in''$ . Найти фазовую скорость распространения волны  $v_\phi$  и коэффициент её затухания  $\alpha$ . Указание: использовать представление комплексного волнового числа  $k = n\omega/c$  для плоской волны

$$E = E_0 \exp(ik\vec{r}).$$

Ответ:  $v_\phi = c/n'$ ,  $\alpha = \omega n''/c$ .

### 3. Теория относительности

#### Задача 28

Большая пластинка из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  движется с постоянной нерелятивистской скоростью  $\vec{V}$  в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ . Найти поляризованность  $\vec{P}$  диэлектрика и поверхностную плотность  $\sigma$  связанных зарядов.

**Решение.** В системе отсчёта, связанной с пластинкой, будет наблюдаться кроме магнитного поля и электрическое, обозначим его  $\vec{E}'_0$ . Согласно формулам преобразования полей,

$$\vec{E}'_0 = [\vec{V}\vec{B}].$$

Поляризованность диэлектрика

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}'_0 = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} [\vec{V}\vec{B}].$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$|\sigma| = P = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} VB,$$

причём знаки зарядов на разных сторонах пластины будут разные.

#### Задача 29

Большая металлическая пластинка движется с постоянной нерелятивистской скоростью  $V$  ортогонально однородному магнитному полю  $B$ . Найти поверхностную плотность зарядов, возникающую на плоскостях пластинки из-за её движения.

**Решение.** Перейдём в систему отсчёта, связанную с пластинкой. Согласно формулам преобразования полей, в этой системе отсчёта будет наблюдаться постоянное однородное электрическое поле

$$\vec{E}' = [\vec{V}\vec{B}].$$

Под действием этого внешнего поля произойдёт смещение зарядов так, что на одной поверхности пластинки выступят положительные заряды, а на противоположной поверхности – отрицательные. Поверхностная плотность этих зарядов будет такой, чтобы создаваемое ими поле внутри пластинки полностью компенсировало внешнее поле  $\vec{E}'$ , ибо

при равновесии результирующее электрическое поле внутри пластинки должно быть равно нулю. Имея в виду граничные условия, можно найти поверхностную плотность зарядов:

$$\sigma = \epsilon_0 |\vec{E}'| = \epsilon_0 |\vec{V}| |\vec{B}|.$$

### Задача 30

Нерелятивистский точечный заряд  $q$  движется с постоянной скоростью  $V$ . Найти с помощью формул преобразования полей магнитное поле  $B$  этого заряда в точке, положение которой относительно заряда определяется радиус-вектором  $\vec{r}$ .

Ответ:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^3} [\vec{V} \vec{r}].$

### Задача 31

Имеется незаряженный длинный прямой провод с током  $I$ . Найти заряд на единицу длины этого провода в системе отсчёта, движущейся поступательно с нерелятивистской скоростью  $V$  вдоль проводника в направлении тока  $I$ .

Ответ:  $\sigma = -\frac{VI}{c^2}.$

Происхождение этого заряда связано с различным лоренцевым сокращением, которое испытывают «цепочки» положительных и отрицательных зарядов (ведь их скорости разные!).

### Задача 32

В К-системе отсчёта имеется узкий пучок протонов, движущихся с релятивистской скоростью  $V$ . На некотором расстоянии от пучка напряжённость электрического поля равна  $E$ . Найти индукцию  $B'$  магнитного поля на том же расстоянии от пучка в К'-системе отсчёта, перемещающейся со скоростью  $V_0$  относительно К-системы в направлении движения протонов.

Ответ:  $B' = \frac{E |V - V_0|}{c^2 \sqrt{1 - (V_0/c)^2}}.$

## Задача 33

Показать, что в случае любых двумерных электрических и магнитных полей, пересекающихся ортогонально, всегда можно перейти к такой движущейся системе координат, в которой либо электрическое, либо магнитное поле будет исключено. Как это зависит от того, что меньше  $\vec{E}$  или  $Z_0 \vec{H}$ ?

## Задача 34

С использованием релятивистских инвариантов показать, что плоская волна остается плоской во всех системах координат.

## Задача 35

Волновой 4-вектор плоской волны в одной из инерциальных систем отсчета записывается как

$$K = (\vec{e}_x \omega/c, \vec{e}_y \omega/c, \vec{e}_z \omega/c, i\omega/c).$$

Используя матрицу преобразования Лоренца, записать формулу для эффекта Доплера, возникающего в системе движущейся вдоль оси  $Ox$  с релятивистской скоростью  $V$ . Исчезает ли эффект Доплера при поперечном движении?

Ответ:  $\omega' = \omega(1 - \vec{e}_x V/c) / \sqrt{1 - (V/c)^2}$ .



## Приложение 2

## Расчет статического поля

Дипольный момент:  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Координатная сетка:  $M = 21$   $dx = 1$

$$i = 0 \dots M-1 \quad x_i = dx \cdot \left(i - \frac{M}{2}\right)$$

$$j = 0 \dots M-1 \quad y_j = dx \cdot \left(j - \frac{M}{2}\right) \quad r_{i,j} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$$

Единичный радиус-вектор:  $e(r) = \frac{r}{|r|}$

Вектор Герца:  $\Gamma(r) = \frac{3 \cdot [e(r) \cdot (e(r) \cdot P)] - P}{(|r|)^3}$

$$G_{i,j} = |\Gamma(r_{i,j})| \quad G1 = \frac{G1}{\min(G1)} \quad G1 = -\ln(G1)$$

Уравнения силовых линий:

$$\Gamma(r) = \frac{3 \cdot [e(r) \cdot (e(r) \cdot P)] - P}{(|r|)^3}$$

$$G_{i,j} = |\Gamma(r_{i,j})|$$

$$U_{i,j} = \frac{(G_{i,j})_0}{\max(|G|)}$$

$$V_{i,j} = \frac{(G_{i,j})_1}{\max(|G|)}$$

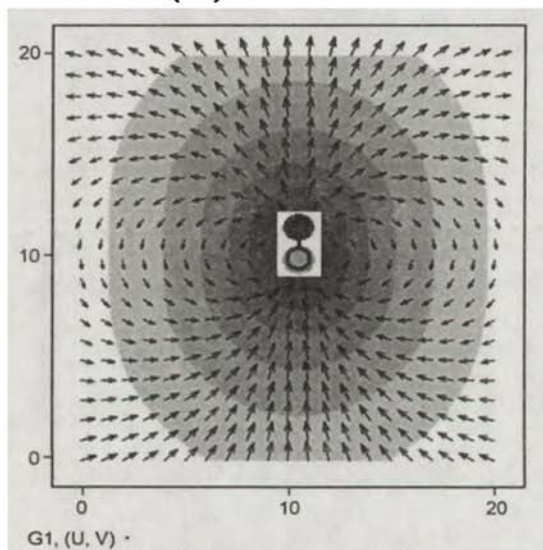


График силовых линий

## Приложение 3

## Расчет поля излучения

Дипольный момент: 
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Модель второй производной сигнала:  $f_0 = 0.75$

$$S_2(t) = 2 \cdot \exp(-t^2) \cdot [4 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot (2 \cdot t^2 - 2 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 - 1)]$$

Единичный радиус-вектор: 
$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

Координатная сетка: 
$$dx = \frac{1}{8} \quad i = 0 \dots 16 \cdot 2 \quad j = 0 \dots 16 \cdot 3$$

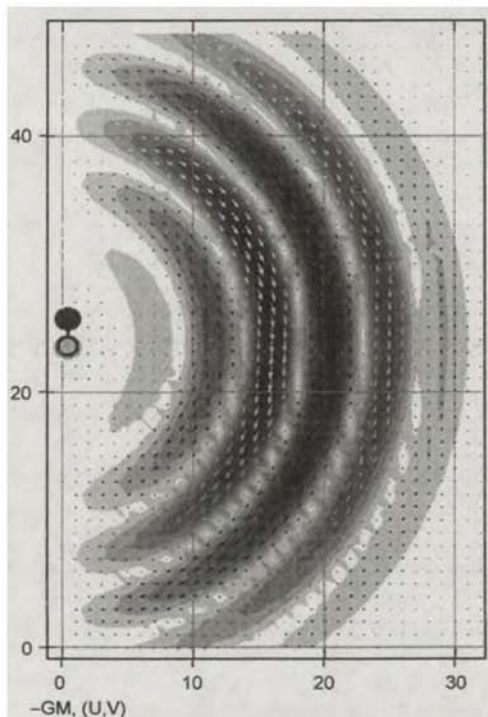


График поля излучения

$$x_i = dx \cdot (i + 1)$$

$$z_j = dx \cdot (j - 16 \cdot \frac{3}{2})$$

$$\mathbf{r}_{i,j} = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ z_j \end{pmatrix}$$

Время наблюдения:  $tt = 2.7$

Вектор Герца:

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{e}(\mathbf{r}) \times \mathbf{P})}{|\mathbf{r}|} \cdot S_2(tt - |\mathbf{r}|)$$

$$G_{i,j} = \Gamma(\mathbf{r}_{i,j})$$

$$GM_{i,j} = |G_{i,j}|$$

Силовые линии:

$$U_{i,j} = (G_{i,j})_0$$

$$V_{i,j} = (G_{i,j})_2$$

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

**ДЛЯ ЗАМЕТОК**

*Владимир Петрович Якубов*

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Учебное пособие

Редактор *Н.И. Шидловская*

Верстка *Д.В. Фортес*

К-ОКП ОК-005-93, код продукции 954240

---

Изд. лиц. ИД № 04000 от 12.02.2001. Подписано к печати 29.05.2006.

Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». .

Усл. п. л. 8,60. Уч.-изд. л. 9,63. Тираж 300 экз. Заказ № 20.

---

ООО «Издательство научно-технической литературы»

634050, Томск, пр. Ленина, 34а, тел. (382-2) 53-33-35

Отпечатано в типографии ЗАО «М-Принт», г. Томск, ул. Пролетарская, 38/1 l





## **ЯКУБОВ**

**Владимир Петрович**

Окончил радиофизический факультет Томского государственного университета. Профессор, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой радиофизики ТГУ и отделения радиофизики и радиоэлектроники СФТИ. Автор более 150 научных работ в отечественной и зарубежной печати, посвященных исследованию распространения радиоволн в околоземном и космическом пространстве и теории обратных задач. Член-корреспондент Метрологической академии Российской Федерации, Международной академии высшей школы и Российской академии естественных наук, почетный работник высшего профессионального образования. Член редакций журналов "Оптика атмосферы и океана" и "Известия вузов. Радиотехника". Лауреат премии Томской области в сфере образования и науки, премии Томского государственного университета.